

E como a transformação Ψ é biunívoca, à parte o ponto $x=r, y=0$, que é imagem de 0 e 2π , podemos aplicar o raciocínio de Teor. 13 e, portanto, $L(\Phi) \geq 2\pi r$.

Como consequência, o comprimento de um arco simples fechado, isto é, topologicamente equivalente a uma circunferência, pode calcular-se à maneira da geometria elementar: decompõe-se C num número n de arcos simples sem pontos interiores comuns, traçam-se as respectivas cordas e toma-se depois o supremo dos perímetros dos polígonos (inscritos) resultantes.

Os últimos resultados justificam inteiramente as definições de *curva rectificável* e de *comprimento*.

E acontece ainda que na família dos sub-arcos de um arco simples ou simples fechado, C , o comprimento

se comporta como numa medida (linear): não-negativa aditiva, nula apenas quando o arco se reduz a um ponto. Trata-se de uma consequência imediata da aditividade da $L(\Psi; I)$ como função do sub-intervalo $I \subset I_0$, sendo $\Psi(u)$, $u \in I_0$, uma trajectória geométrica sobre C .

E a definição de curva aqui adotada exclui o caso patológico das curvas de Peano⁽¹⁾, Hilbert ou de Osgood, cujo gráfico enche um quadrado ou pelo menos não tem medida nula.

(1) Dada por Peano em 1890 e que marcou um momento decisivo na separação dos dois conceitos, até então identificados, de curva-trajectória e curva-conjunto do E_2 .

Um teorema sobre a estrutura dos divisores de um grupo

por F. Dias Agudo

Consideremos o grupo G_8 constituído pelas matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e que, como facilmente se vai concluir, é isomorfo do grupo das rotações do quadrado.

Da transformação linear $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ resulta que que às matrizes de G_8 corresponderão, respectivamente, as seguintes transformações de coordenadas no plano:

$$I \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = y \end{pmatrix} \quad a \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = -y \end{pmatrix} \quad b \begin{pmatrix} x' = -x \\ y' = y \end{pmatrix} \quad c \begin{pmatrix} x' = -x \\ y' = -y \end{pmatrix}$$

$$d \begin{pmatrix} x' = y \\ y' = x \end{pmatrix} \quad e \begin{pmatrix} x' = y \\ y' = -x \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} x' = -y \\ y' = x \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} x' = -y \\ y' = -x \end{pmatrix}$$

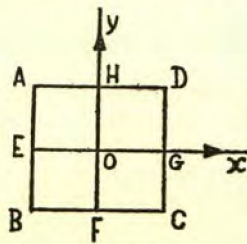


Fig. 1

de modo que (fig. 1): I será a «rotação» identidade; a a simetria em relação a EG ; b a simetria em relação a HF ; c a rotação de 180° em torno de O ; d a simetria em relação a BD ; e a rotação de 90° no sentido directo em torno de O ; f a rotação de 270° no sentido directo em torno de O

e g a simetria em relação a AC , resultados que fa-

cilmente nos permitiam construir a tábua de multiplicação do grupo G_8 .

Posto isto, procuremos representar gráficamente a estrutura dos sub-grupos de G_8 .

Designando por ε nm dos números ± 1 , temos $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = I$ [é o caso da matriz I , com

$\varepsilon=1$, e c , com $\varepsilon=-1$]; $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = I$

[caso das matrizes a e b]; $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = I$

[matrizes d e g]; e $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2 \end{pmatrix} =$

$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}^4 = I$

[matrizes e e f], o que nos permite concluir que

$$I; \{I, a\}; \{I, b\}; \{I, c\}; \{I, d\}; I, g\};$$

$$e \{I, e, e^2, e^3\} \equiv \{I, e, c, f\} \equiv \{I, f, f^2, f^3\}$$

são sub-grupos de G_8 .

As relações

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \delta_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

onde $\varepsilon_i, \delta_i, \varepsilon, \delta$, representam também qualquer dos números ± 1 , mostram, por outro lado, que as 4 matrizes I, a, b, c (em que os elementos nulos se encontram na 2.ª diagonal) constituem um outro sub-grupo (o grupo de Klein) de G_8 .

