Daqui resulta que a soma dos diedros dos poliedros componentes P_i é igual à soma dos diedros do poliedro total P (eventualmente repetindo-se algum diedro várias vezes) mais um número inteiro de ângulos rasos. Quere dizer, as duas somas são congruentes para o módulo π.

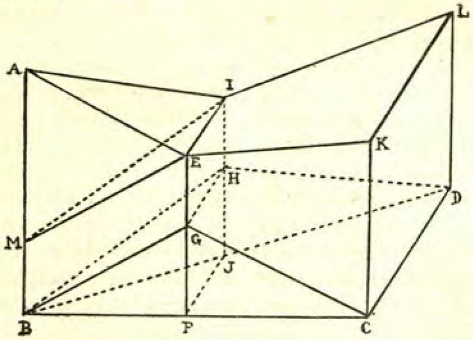


Fig. 2

Coisa análoga se passa com o poliedro P' e seus componentes P'_i.

Da congruência dos poliedros P_i e P'_i resulta imediatamente por transitividade o *teorema.*

Como aplicação demonstremos que o tetraedro regular *não é equivalente* a um cubo de igual volume.

De facto a soma dos diedros dum tetraedro regular, repetindo-se eventualmente alguns deles, é $K \cdot \alpha$, onde α é tal que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$ e K um inteiro, e a soma dos diedros do cubo, algum repetido eventualmente, é $K' \cdot \pi/2$; então pelo teorema de Dehn será

$$K \cdot \alpha \equiv K' \cdot \pi/2 \pmod{\pi}$$

donde

$$\operatorname{tg} K\alpha = \operatorname{tg}(K' \cdot \pi/2)$$

ou se fôr $K/K' = p/q$ (p e q primos entre si) será

$$\operatorname{tg} p\alpha = \operatorname{tg} q' \cdot \pi/2 .$$

Mostremos que esta igualdade é impossível. Como se sabe

$$\operatorname{tg} p\alpha = \frac{p \cdot \operatorname{tg} \alpha - \binom{p}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \binom{p}{5} \operatorname{tg}^5 \alpha - \cdots}{1 - \binom{p}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \binom{p}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha - \cdots}$$

e como $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$ será

$$\operatorname{tg} p\alpha = \sqrt{8} \cdot \frac{p - \binom{p}{3} 8 + \binom{p}{5} 8^2 - \cdots}{1 - \binom{p}{2} 8 + \binom{p}{4} 8^2 - \cdots}$$

Então se q é par $\operatorname{tg} p\alpha = \operatorname{tg} q \cdot \pi/2 = 0$ donde

$$p - \binom{p}{3} 8 + \binom{p}{5} 8^2 - \cdots = 0$$

e portanto $p = \dot{8}$, o que é impossível visto p e q serem primos entre si.

Se q é impar então $\operatorname{tg} p\alpha = \operatorname{tg} q\,\pi/2 = \pm\infty$ e por isso

$$1 - \binom{p}{2} 8 + \binom{p}{4} 8^2 - \cdots = 0$$

igualdade manifestamente impossível.

É então *impossível* decompor o tetraedro regular e o cubo de igual volume, em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois, o que resolve pela negativa o problema de Hilbert.

Uma aplicação da Geometria Projectiva ao problema das imagens eléctricas

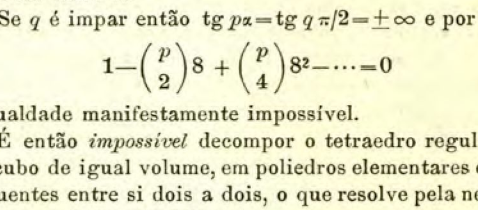
por **Fernando R. Dias Agudo** (*Assistente do I. S. A*).

O estudo da influência electrostática exercida por uma carga pontual Q sobre um condutor esférico ligado ao solo (quando mergulhados num dieléctrico de constante dieléctrica ε) levou Kelvin a substituir a esfera condutora por uma esfera do mesmo dieléctrico, na qual determinaria a posição de uma outra carga pontual Q' (imagem eléctrica da primeira) tal que fosse nulo o potencial devido a Q e Q' em todos os pontos da esfera (visto que se supõe ligada ao solo).

Designando por p e q as distâncias de um ponto P da esfera a Q e Q', respectivamente, deve ter-se portanto

$$\frac{Q}{\varepsilon p} + \frac{Q'}{\varepsilon q} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{Q'}{Q} = -\frac{q}{p}$$

e o problema que se põe é o de saber se será de facto possível encontrar uma carga Q' que verifique a relação anterior para qualquer ponto da esfera.



Raciocinando para a secção determinada por qualquer plano diametral que passe por Q, a Geometria Projectiva responde-nos afirmativamente, uma vez