attuabile solo in parte. Ma quello che abbiamo voluto raccomandare è un metodo che permetta di integrare e coordinare le sparse membra di nozioni prospettate sovente in un poco opportuno isolamento. In questa continua coordinazione e trasformazione é gran parte dello stesso spirito matematico, e bisogna conservare appunto tale spirito, più che non le singole nozioni. Chi è disposto benevolmente a condividere il nostro punto di vista, ci rimprovererà di non aver considerato affatto la geometria: ad esempio la nota trasformazione del teorema di Pitagora ottenuta da Ippocrate (il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso o acuto, ecc.), facilmente ricavabile dal quadrato del binomio.

Ci scuseremo osservando che abbiamo già abbastanza abusato della pazienza del lettore, insistendo troppo a lungo su di un tema così comune.

# MATEMÁTICAS ELEMENTARES

## PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

### Ponto 1

**2631** — Determine os valores de $K$ para os quais é negativa a raiz da equação $K^2(1-x)=4-5Kx$. R: *Como* $x=(K^2-4):(K^2-5K)$, *a raiz da equação será negativa quando o for o produto* $(K^2-4)(4^2-5K)$ *ou seja quando* $(K+2)K(K-2)(K-5)<0$. *Ora para* $K<-2$ *todos os factores se tornam negativos e o seu produto é positivo; se* $-2<K<0$ *três deles são negativos e o outro é positivo, logo o produto é negativo se* $0<K<2$, *dois são negativos e dois positivos, e o produto é positivo; se* $2<K<5$, *três dos factores são positivos e um negativo e o produto é negativo, e finalmente se* $K>5$ *todos os factores são positivos. São então soluções do problema os valores de* K *tais que* $-2<K<0$ *e* $2<K<5$.

**2632** — Calcule $m$ de modo que

$$[m!+(m-1)!]:[(m+1)!-m!]=6:25.$$

R: *Se no primeiro membro pusermos em evidência os factores comuns ao numerador e denominador, simplificando, obtém-se sucessivamente:*

$$[(m-1)!(m+1)]:[(m-1)!(m^2+m-m)=6:25$$

*ou* $(m+1):m^2=6:25$, *donde* $m=5$.

**2633** — Sabendo que: na equação $ax^2+bx+c=0$ é $x'+x''=-b/a$ e $x'x''=c/a$; demonstre que: se uma das raizes de $x^2+px+q=0$ é o quadrado da outra tem lugar a relação $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. R: *Notemos que será* $x_1+x_2=-p$ *e* $x_1x_2=q$ *se forem* $x_1$ *e* $x_2$ *as raizes de* $x^2+px+q=0$ *e então* $p^3=-(x_1+x_2)^3=-(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3)$ $q(3p-1)=-(3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_1x_2)$ *e* $q^2=x_1^2x_2^2$. *Como, por hipótese, é* $x_1^2=x_2$, *obtém-se imediatamente* $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

**2634** — Indique a expressão geral dos múltiplos de 3 que divididos por 9 produzem restos superiores a 4. R: *As expressões gerais dos números que divididos por* 9 *dão restos superiores a* 4 *são* $9m+5$; $9m+6$; $9m+7$ *e* $9m+8$ *onde* m *é um inteiro qualquer; destes o único que é múltiplo de* 3 *é* $9m+6$.

**2635** — Mostre que a soma $\dfrac{7n+1}{7}+\dfrac{5p-1}{5}$ é uma fracção irredutível. R: *De facto*

$$(7n+1):7\ (+5p-1):5=[(35n+5)+35p-7]:35=(35n-2):35,$$

*e como* $35n-2$ *é primo com* 35 *então a fracção é irredutível.*

**2636** — Resolva pelo método das figuras semelhantes o problema: «Construa um triângulo conhecendo o comprimento $h_1$ da altura relativa a um dos lados e os ângulos $\alpha$ e $\beta$ adjacentes a esse lado».

Indique em que consiste o método: R: *Constroe-se um triângulo cujos angulos sejam* $\alpha, \beta$ *e* $180°-(\alpha+\beta)$ *e de altura* h *qualquer. Constroe-se em seguida um triângulo homotético do primeiro e cuja razão de homotetia seja* $h_1/h$ *se* $h_1$ *for o comprimento dado da altura relativa ao lado a que* $\alpha$ *e* $\beta$ *são adjacentes.*

### Ponto 2

**2637** — Dada a equação $2x^2-2(1-2m)x+m^2=0$ de raizes $x'$ e $x''$ forme a equação do 2.° grau cujas raízes são $y'=x'+m$ e $y''=x''+m$. R: *Como* $y'+y''=x'+x''+2m=1-2m+2m=1$ *e* $y'y''=x'x''+m(x'+x'')+m^2=m^2/2+m(1-2m)+m^2=(2m-m^2)/2$, *a equação pedida será* $2y^2-2y+2m-m^2=0$.

**2638** — Escreva, convenientemente simplificado, o 5.° termo do desenvolvimento de $(a\sqrt{b}/2+i\sqrt{2}/a^2b)^8$. R: $T_5={}^8C_4 i^4\cdot 2^2\cdot a^4\cdot b^2/2^4\cdot a^8\cdot b^4=35/2a^4b^2$.

**2639** — Resolva a inequação

$$(2x^2-3x-35):(x^2-6x-16)>0.$$

R: *Para que a fracção seja positiva é necessário que*