afim de que o ponto do próximo exame fôsse mais acertamente compensado.

A ocasião oportuna para serem colhidos todos êsses dados estatísticos seria a época de exames, e quando da classificação das provas dos alunos. Mas, nessa ocasião o professor tem de classificar, em 8 dias, 236 provas, por exemplo, e às vezes bastantes mais, fiscalizar as provas da 2.ª chamada e classificá-las também, e tudo isso é incomportável com a preocupação de estatísticas de pontos exame.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em fins de Junho de 1946 tiveram logar no Liceu de Pedro Nunes de Lisboa, 3 conferências promovidas pela S. P. M. e que versaram os temas «A noção de número real» e «A estrutura de divisibilidade dos inteiros». Os conferentes foram Luís Neves Real, investigador do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, Andrade Guimarães, aluno do 2.º ano da Licenciatura em Ciências Matemáticas da Faculdade de Ciências do Porto, e José D. da Silva Paulo, professor do Liceu de Gil Vicente de Lisboa. A «Gazeta de Matemática» atendendo à importância dos assuntos e à maneira por qne foram tratados e expostos, pediu aos conferentes que redigissem as notas que se seguem. Assistiram às conferências o Reitor do Liceu e vários professores do ensino secundário e superior sendo porém pouco numerosa a assistência.

A NOÇÃO DE NÚMERO REAL

por ***Andrade Guimarães*** *e* ***L. Neves Real***

O Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto fixou-nos, como tema das lições a realizar em Lisboa, a convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, a teoria aritmética do contínuo tal qual a conceberam, no último quartel do século passado, Cantor, Méray e Dedekind, com tôda a precisão que os métodos da álgebra moderna permitem imprimir-lhe.

Ao artigo de Bachman, na Enciclopédia alemã, fomos buscar a orientação do nosso trabalho.

Evitando a definição dos números naturais

$$1\ 2\ 3 \cdots$$

introduzidos axiomàticamente, começamos por indicar como dos postulados de Peano se pode derivar tôda a aritmética. Em seguida, considerando o conjunto de todos os números naturais, algebrizado em relação à operação — soma — e definida nêle uma relação de ordem, menor do que, $<$, o espaço algébrico dos números naturais $\{a, b, c \cdots\}$ apresenta-se como um semi-grupo comutativo e ordenado. Nêsse semi-grupo, a operação $a+x=b$ não tem solução se $a \geq b$. A álgebra moderna, através do processo de formação de classes de equivalentes, fornece o método para construir a partir dêsse semi-grupo um novo espaço algébrico — agora grupo ordenado $\{\alpha, \beta, \gamma \cdots\}$ — que num certo sentido se pode considerar como uma sua ampliação: o novo espaço contém um semi-grupo isómorfo e semelhante ao de partida. No nosso caso o semi-grupo dos números naturais amplia-se até ao grupo ordenado dos inteiros (positivos, zero e negativos); para isso consideram-se todos os pares (b, a) de números naturais, chamam-se equivalentes dois pares (b, a) e (b', a') se $b+a'=b'+a$:

$$(b, a) \equiv (b', a') \longleftrightarrow b+a'=b'+a,$$

e, por definição, toda a classe (conjunto) de pares equivalentes é um número inteiro; pode representar-se por $b-a$ a classe α de todos os pares equivalentes a (b, a). As conhecidas definições de soma, produto e ordenação de inteiros, dão ao espaço algébrico dêstes números o carácter de domínio de integridade ordenado. Neste domínio e em relação à sua operação de soma e ao critério de ordenação nele adoptado, o sub-conjunto dos números inteiros da forma $(a+b)-a$ é um semi-grupo ordenado e a correspondência $(a+b)-a \longleftrightarrow b$ com os números naturais um isomorfismo algébrico e de ordem. Só neste sentido —*a menos dum isomorfismo*— é que podemos dizer que os inteiros contêm os números naturais. Por comodidade usam-se os símbolos $1, 2, 3, \cdots$ para representar os números inteiros isómorfos dos naturais: 1 para o inteiro $(a+1)-a$, 2 para $(a+2)-a$, etc. Mas êles representam seres matemáticos inteiramente diferentes: o número natural 1 é uma noção primitiva da axiomática de Peano, assim como o número natural 2 é o «sucessor» de 1, etc. — mas o número inteiro 1 é o conjunto (ou classe) de todos os pares de naturais da forma $(a+1, a)$, isto é, de todos aqueles cuja *diferença* é o número natural 1: o número inteiro 2 o conjunto de todos os pares de naturais cuja *diferença* é o número natural 2, etc.

Os novos números serão simbolizados por $0, -1, -2, -3, \cdots$

Em relação à operação produto, o espaço algébrico dos números inteiros não zero, em que não é sempre solúvel a equação $\alpha \cdot x = \beta$, com $\alpha \neq 0$, comporta-se como um semi-grupo que pelo processo anterior é anàlogamente susceptível de ampliação. Formem-se todos os pares de números inteiros $(\beta, \alpha), \alpha \neq 0$, defina-se entre êles a seguinte relação de equivalência:

$$(\beta, \alpha) \equiv (\beta', \alpha') \longleftrightarrow \beta \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha$$

e agrupem-se numa mesma classe todos os pares entre si equivalentes; a cada uma destas classes chama-se número racional; e representar-se-á por β/α, por exemplo, o número racional que é a classe de todos os pares equivalentes ao par (β, α).

As definições habituais de soma, produto e ordenação de números racionais organizam o conjunto como corpo comutativo arquimèdicamente ordenado, contendo um domínio de integridade isómorfo e semelhante ao domínio dos inteiros: é o sub-conjunto dos números racionais da forma $\beta\alpha/\alpha$ e o isomorfismo é definido pela correspondência $\beta\alpha\ \alpha \longleftrightarrow \beta$.

De novo se pode agora dizer que, a menos dum isomorfismo, os números racionais compreendem os inteiros e adoptar os mesmos símbolos, $\cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$, para os racionais isomorfos desses inteiros — não esquecendo que, por exemplo, o número racional 1 é agora o conjunto de todos os pares (β, α) de inteiros cujo *cociente* é o número inteiro 1. Números racionais como $2/3, -5/7, \cdots$ são números sem correspondência nos inteiros.

Se quizermos caracterizar axiomàticamente os números racionais fazêmo-lo com base no teorema: «todo o corpo ordenado que, a menos dum isomorfismo, contém os números inteiros, contém — no mesmo sentido — os números racionais»; e podemos definir o corpo dos números racionais; *a)* ou como sendo o *menor* corpo que contém o semi-grupo dos números naturais; *b)* ou como sendo o *menor* dos corpos ordenados e arquimedeanos.

Introduzindo agora a noção de valor absoluto $|r|$ dum racional r:

$$|r| = r, \text{ se } r \geq 0 \text{ e } |r| = -r \text{ se } -r > 0$$

e definindo como distância $\rho(r_1, r_2)$ de dois números racionais r_1 e r_2, precisamente o valor absoluto da sua diferença $|r_2 - r_1|$, o espaço algébrico dos números racionais aparece-nos como espaço métrico que não é *completo*, isto é, para o qual a condição de Cauchy não é condição suficiente de convergência — ou, por outras palavras, as sucessões de Cauchy não são necessàriamente convergentes. A construção dos números reais (Cantor) vai efectuar-se com vista precisamente a que a condição de Cauchy seja necessária e suficiente de convergência: como espaço métrico o dos números reais deve ser um espaço completo. Para isso, no conjunto de tôdas as sucessões de Cauchy tomam-se como equivalentes aquelas cuja diferença converge para o número racional 0 e chama-se número real a tôda a classe de sucessões de Cauchy entre si equivalentes, podendo representar-se o número real $\bar{\xi}$ por uma qualquer das suas sucessões $\{\xi_n\}$.

A algebrização e a ordenação fazem-se pela definição:

$\bar{\xi} + \bar{\eta} =$ classe das sucessões equivalentes a $\{\xi_n + \eta_n\}$
$\bar{\xi} \cdot \bar{\eta} =$ classe das sucessões equivalentes a $\{\xi_n \cdot \eta_n\}$
$\bar{\xi} < \bar{\eta}$ se a partir de certa ordem $\eta_n - \xi_n > \alpha$, com $\alpha > 0$.

Como há números reais cujas sucessões convergem para números racionais êsses números reais constituem um sub-corpo isómorfo e semelhante ao corpo dos números racionais, de modo a poder dizer-se que os números reais contêm, a menos dum isomorfismo, os números racionais. Assim, é justificável o uso dos mesmos símbolos de números racionais, $-3/4, -2, 0, 1, \cdots$ para representar os números reais seus isomorfos. Simplesmente, não se esqueça que, assim como, por exemplo, o número racional 1, não é o mesmo que o número inteiro 1, nem êste o mesmo que o número natural 1, o número real 1 é agora a classe de tôdas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 1.

Uma vez algebrizado e ordenado, o conjunto dos números reais, como espaço algébrico apresenta o carácter de corpo comutativo, arquimèdicamente ordenado e como espaço métrico o de espaço completo. Mas como inversamente se pode afirmar ser todo o corpo arquimèdicamente ordenado isomorfo e semelhante a um sub-corpo do corpo dos números reais, a caracterização dos números reais pode fazer-se pelos dois seguintes quadros, equivalentes:

A.1 — I Corpo ordenado,
A.1 — II arquimedeano,
A.1 — III completo («abgeschlossen»-Cantor)

e

A.2 — I Corpo ordenado,
A.2 — II arquimedeano,
A.2 — III perfeito («vollständig»-Hilbert).

Como da continuidade à Dedekind («Stetigkeit») se deduzem as propriedades de ser arquimedeano e de ser completo, é ainda equivalente às anteriores a caracterização

A.3 — I Corpo ordenado,
A.3 — II contínuo («stetig»-Dedekind)

Estas propriedades não são porém tôdas indispensáveis — pode reduzir-se o seu número graças a um resultado de Reidemeister: todo o grupo aditivo, ordenado arquimèdicamente, contínuo à Dedekind e cujos elementos são divisíveis ao meio (para cada seu elemento x, existe um outro, representado por $x/2$, tal que $x/2+x/2=x$) é isomorfo e semelhante ao grupo dos números reais. E é possível definir uma operação de produto de modo que em relação a ela e à operação do grupo, o espaço seja um corpo comutativo: produto $b \cdot a$ de b por a é o elemento do grupo que corresponde a b no automorfismo do grupo que conservando a ordem se $a>0$, ou invertendo-a se $a<0$, faz corresponder a um mesmo elemento unidade i, o elemento a. Assim nos aparece a conhecida regra de multiplicação: o produto $b \cdot a$ obtém-se do multiplicando b, como o multiplicador a se obteve da unidade i: pelo mesmo automorfismo.

Assim se podem tomar como quadros axiomáticos dos números reais ou

A.4 — I Grupo ordenado
A.4 — II com ordenação densa (entre dois dos seus elementos existe sempre um terceiro)
A.4 — III arquimedeano
A.4 — IV completo (Cantor)

ou

A.5 — I Grupo ordenado
A.5 — II arquimedeano
A.5 — III perfeito (Hilbert)

ou, finalmente:

A.6 — I Grupo ordenado
A.6 — II com ordenação densa
A.6 — III contínuo (Dedekind).

ESTRUTURA DA DIVISIBILIDADE DOS INTEIROS

por ***J. D. DA SILVA PAULO***

Na última das palestras da série que a S. P. M. promoveu e se realizaram no Liceu Pedro Nunes de Lisboa, foi estudada a noção de estrutura dando-se como exemplo a *estrutura da divisibilidade dos inteiros*.

Apresentou-se a seguinte definição:

A — Chama-se estrutura todo o conjunto S de elementos $a, b, c \ldots$ para os quais se define:

1.º uma relação de ordem parcial ($\preccurlyeq$) (que pode ser uma ordem) que liga alguns pares de elementos de S, gozando das propriedades:

$$O1 - a \preccurlyeq a$$

$$O2 - \text{Se } a \preccurlyeq b \text{ e } b \preccurlyeq a \rightarrow a=b$$

$$O3 - \text{Se } a \preccurlyeq b \text{ e } b \preccurlyeq c \rightarrow a \preccurlyeq c$$

2.º) Uma operação $\frown$ que a cada par de elementos a e b de S faz corresponder um terceiro elemento $a \frown b$ também de S e tal que

$$D1 - a \frown b \preccurlyeq a \text{ e } a \frown b \preccurlyeq b$$

$$D2 - \text{Se } c \preccurlyeq a \text{ e } c \preccurlyeq b \rightarrow c \preccurlyeq a \frown b$$

3.º) Uma operação $\smile$ que a cada par de elementos a e b de S faz corresponder um terceiro elemento $a \smile b$ também de S e tal que

$$M1 - a \preccurlyeq a \smile b \text{ e } b \preccurlyeq a \smile b$$

$$M2 - \text{Se } a \preccurlyeq c \text{ e } b \preccurlyeq c \rightarrow a \smile b \preccurlyeq c$$

Em seguida estudou-se como exemplo duma estrutura a da *divisibilidade dos inteiros* onde a relação $\preccurlyeq$ é a relação «*divide*» e as operações $\frown$ e $\smile$ são respectivamente o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum, mostrando-se aí a existência e unicidade das operações, e a partir das propriedades O, D e M demonstrou-se que as operações $\frown$ e $\smile$ gozam das seguintes propriedades

$$B - \quad \begin{array}{c|c} a \frown b = b \frown a & a \smile b = b \smile a \\ a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c & a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c \\ a \frown a = a & a \smile a = a \end{array}$$

Aqui fez-se notar o princípio da dualidade e poz-se em evidência que o conjunto das propriedades B definindo as operações $\frown$ e $\smile$ e a propriedade

C — *a igualdade* $a \frown b = a$ *implica* $a \smile b = b$, (tomando como definição da relação $\preccurlyeq$ a seguinte: «Diz-se que $a \preccurlyeq b$ se se verificar C») pode ser tomado como definição de estrutura, dada a sua equivalência com a definição A.

Como noutras estruturas a da *divisibilidade* contém um primeiro e um último elemento, porque se verifica a dupla relação

$$1 \preccurlyeq a \preccurlyeq O$$

qualquer que seja o inteiro a, e daqui se tiraram as propriedades duais

$$\begin{array}{c|c} O \frown a = a & 1 \smile a = a \\ 1 \frown a = 1 & O \smile a = O \end{array}$$

demonstrou-se finalmente que a estrutura da divisibilidade é distributiva pois se verificam as propriedades:

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c)$$

e

$$a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown (a \smile c)$$

e para isso já houve que fazer apêlo a propriedades particulares do máximo divisor comum, do menor múltiplo comum e da divisibilidade, não dedutíveis exclusivamente das propriedades O, D e M.

DOUTORAMENTOS

Em 29 e 31 de Julho de 1946 realizaram-se na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas de Alfredo Pereira Gomes. A tese *Introdução ao estudo duma noção de funcional em espaços sem pontos* foi discutida pelos Profs. A. H. Peixoto de Queiroz e Ruy L. Gomes. «Equações de Clairaut; generalizações e Secantes comuns a duas cónicas; condições de tangência. Problemas correlativos» foram os temas sôbre que foi feito interrogatório pelos Profs. A. Scipião G. de Carvalho e A. Madureira e Sousa.

A tese foi publicada no Vol. 5, fasc. 1 de «Portugaliae Mathematica» e pode ler-se no presente número de «Gazeta de Matemática» uma apreciação do Prof. Ruy L. Gomes, incluída no Boletim Bibliográfico.

Em 7 de Outubro de 1946 o bolseiro do Instituto para a Alta Cultura em Zürich, Hugo Baptista Ribeiro, doutorou-se em Ciências Matemáticas na Escola Politécnica Federal. Da tese *«Lattices» des groupes abéliens finis* foram referentes os Professores P. Bernays e H. Hopf. Este trabalho será publicado brevemente em «Commentarici Mathematii Helvetici» e um resumo em «Portugaliae Mathematica» Vol. 5.

Na mesma escola suiça Armando Carlos Gibert defendeu em 20 de Maio de 1946 a tese *Effect de la température sur la diffusion neutron-proton*, obtendo o grau de doutor em Ciências Naturais.

Foram referentes os Profs. P. Scherrer e F. Tank e presidente do juri o Prof. H. Hopf. A tese foi publicada em «Helvetica Physica Acta».

A. F. A. S. — CONGRESSO DE NICE — SETEMBRO DE 1946

Communications faites au 65^e^ Congrès, tenu à Nice du 9 au 14 septembre 1946.

Section 1: Mathématiques:

Président: Mr. E. Gau, Recteur de l' Académie d'Aix-Marseille.

Vice-Présidents: MM. E. Blanc, Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand; C. Lurquin, Professeur à l'Université libre de Bruxelles; F. Roger, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Secrétaire: P. Belgodère, Attaché de Recherches au C. N. R. S.

Liste des communications (L'astérisque * indique une communication écrite):

Lundi 9 septembre (14 h. à 16 h.): Prise de contact des membres de la section.

Mardi 10 septembre (9h. à 12h. et 14h. à 16h.):

(1) P. Belgodère: Quelques enquêtes publiques intéressant les mathématiciens. Informations.

(2) A. Gloden: Un nouveau théorème sur les multigrades.

(3) A. Gloden: Un problème d'analyse diophantienne multigrade.

(4) A. Gloden: Quelques égalités multigrades.

(5) *A. Gérardin: Solution d'une équation multigrade.

(6) *G. Palamà: Multigradi a catena parametriche con infiniti elementi.

(7) M. Krasner: Fonctions analytiques dans les corps valués complets.

(8) E. Blanc: Activité du Seminaire mathématique de Marseille (fonctions abstraites multiformes).

(9) *M. Brelot: Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point irregulier.

(10) *P. Lelong: Problèmes relatifs aux fonctions pluriharmoniques et aux fonctions plurisous-harmoniques.

(11) *N. Saltykov: Note sur la méthode de D'Alembert pour intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants par rapport aux variables paramétriques.

(13) *A. Bloch: Sur une classe de fonctions entières engendrées par un corps quadratique réel.

Mercredi 11 septembre (9h. à 12h. et 14h. à 16h.):

(14) E. Blanc: Conférence sur le parallélisme entre courbes et ses applications à la convexité.

(15) P. Montel: Sur certaines équations fonctionnelles liées au théorème de Jacobi.

(16) P. Belgodère: Calcul des variations des intégrales de surface; interprétation géométrique.

(17) *T. Lemoyne: Sur le lieu des foyers d'une famille de coniques.

(18) *T. Lemoyne: Construction, par la règle seule, d'une infinité de points et de tangentes de la cubique plane la plus générale.

(19) *V. Thébault: Transmutations d'un tetraèdre.

Vendredi 13 septembre (9h. à 12h.):

(20) R. Wavre: L'itération des opérateurs hermitiens.

(21) P. Humbert: Formules trigonométriques dans le plan et dans l'espace attachées à l'opérateur Δ.

(22) *B. Combes: Le principe de Bayes et le problème de l'ajustement.

(23) *D. Wolkovitch: Ajustement des formules aux

résultats d'expériences selon la loi des moindres carrés.

(24) *R. Lacape : Les problèmes mathématiques de l'influx nerveux.

(25) Mariani : Les espaces généralisés et l'électromagnétisme.

Samedi 14 septembre (10h.30 à 12h.) :

(26) E. Merwart: Chronologie mathématique: Deux numérotations inverses : période julienne et millésimes préchrétiens.

(27) E. Kraft : Critériuns de divisibité, critérium des nombres premiers.

(28) J. Malburet : Une démonstration du théorème de Saccheri (5e postulat).

(29) J. Malburet : Le sixième postulat d'Euclide.

(30) *E. Barbette : Le dernier théorème de Fermat et sa généralisation.

Le 66e Congrès aura lieu à Biarritz en Septembre 1947. Le 67e Congrès aura lieu à Genève en 1948.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — Julho de 1946.

I

2273 — Determine o parâmetro m de modo que as raizes da equação $x(1-x)=m/(m+1)$ difiram de duas unidades. R: *A equação proposta pode escrever-se sob a forma equivalente* $x^2-x+m:(m+1)=0$ *e se forem* x_1 *e* x_2 *as suas raízes teremos o sistema*: $x_1+x_2=-1$, $x_1-x_2=2$ *e* $x_1 x_2=m:(m+1)$, *cuja resolução conduz à solução procurada* $m=-3/7$.

2274 — Diga o que se lhe oferecer sôbre a possível existência de soluções inteiras e positivas da equação $10x-6y=8$. Justifique a resposta. R: *A equação* $10x-6y=8$ *é equivalente a* $5x-3y=4$, *equação que tem uma infinidade de soluções inteiras e positivas pois estas são dadas pelas expressões* $x=2+3m$ *e* $y=2+5m$, *onde* m *representa um inteiro positivo ou nulo qualquer, em vista de o par* $x_1=2$, $y_1=2$ *constituir uma solução inteira da equação proposta.*

2275 — Diga qual dos números $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$ é maior. Justifique a resposta. R: *Como* $\sqrt[3]{3}$ *e* $\sqrt{2}$ *se podem escrever sob as formas* $\sqrt[6]{3^2}$ *e* $\sqrt[6]{2^3}$ *resulta imediatamente da comparação destes radicais que é* $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

II

2276 — Dado um cateto dum triângulo rectângulo, e a diferença entre a sua hipotenusa e o outro cateto, deduza em função dos dados as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo, os seus ângulos agudos e a sua área. R: *Seja* b *o cateto dado e* $a-c=d$ *a diferença entre a hipotenusa e o outro cateto. Como o triângulo é rectângulo será* $b^2+c^2=a^2$ *ou* $a^2-c^2=b^2$ *ou ainda* $(a+c)(a-c)=b^2$, *donde se deduz* $a+c=b^2:d$ *e portanto* $a=(b^2+d^2):2d$ *e* $c=(b^2-d^2):2d$. *Daqui se deduz que* $\operatorname{tg} B=2db:(b^2-d^2)$ *e* $\operatorname{tg} C=(b^2-d^2):2db$.

2277 — Verifique a identidade

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}.$$

R: *O primeiro membro da igualdade pode escrever-se sucessivamente sob as formas:*

$$\begin{aligned}\sec^2(\pi/4+\alpha)&=1:\cos^2(\pi/4+\alpha)=1:[\cos\pi/4\cos\alpha-\\&-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\pi/4]^2=1:[(\sqrt{2}/2)^2.(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2]=\\&=1:[1/2\times(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)]=\\&=2:[1-\operatorname{sen}(2\alpha)],\end{aligned}$$

o que prova a identidade.

2278 — Deduza a expressão geral dos ângulos que têm a mesma cosecante que o ângulo que mede θ radianos. R: *Como se sabe os ângulos* θ *e* $\pi-\theta$ *têm a mesma cosecante, e como* θ *e* $\theta+2k\pi$ (k *inteiro*), *e* $\pi-\theta$ *e* $\pi-\theta+2k'\pi$ (k' *inteiro*) *têm a mesma cosecante, poderemos escrever as expressões* $2k\pi+\theta$ *e* $(2k'+1)\pi-\theta$, *que se podem condensar sob a forma* $n\pi+(-1)^n\cdot\theta$ (n *inteiro*), *como sendo as expressões gerais dos arcos que têm a mesma cosecante que o ângulo* θ.

III

2279 — Deduza o valor da razão entre o volume de uma esfera e o de um cubo nêle inscrito. R: *O volume da esfera é dado pela expressão* $4\pi R^3:3$, *e a aresta do cubo inscrito na esfera de raio* R *é dada por* $l=2R\sqrt{3}:3$, *donde o volume* $l^3=8R^3\sqrt{3}:3^2$. *A razão dos volumes é então* $\pi\sqrt{3}:2$.

2280 — Considere duas circunferências de raios diferentes, tangentes exteriormente num ponto T.

Demonstre que tendo P e P' os pontos de contacto duma tangente comum às duas circunferências, o ângulo $P\widehat{T}P'$ é um ângulo recto. R: *Tracemos a tangente comum às duas circunferências no ponto* T *a qual encontrará a tangente* PP' *num ponto* Q. *Em vista da propriedade bem conhecida de os segmentos das tangen-*