Einstein e o Ano *Mirabilis*

Augusto Barroso
Centro de Física Teórica e Computacional, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

Em 30 de Abril de 1905 Albert Einstein submete a sua tese de doutoramento à Universidade de Zurique. No decurso desse ano publica na revista "Annalen der Physik" cinco artigos: dois sobre o movimento Browniano, dois sobre a teoria da relatividade restrita e um sobre os quanta de luz. Podemos sintetizar a importância destes trabalhos para o desenvolvimento da Física do século XX dizendo que os trabalhos do movimento Browniano permitiram o estabelecimento de uma prova irrefutável da existência de átomos; os dois artigos sobre relatividade terminam com o conceito de tempo absoluto e o último, que cronologicamente foi o primeiro a ser publicado, ajudou ao nascimento da Mecânica Quântica.

Para a maioria das pessoas são os artigos sobre relatividade que imediatamente são associados ao nome de Einstein, basta recordar a célebre equação $E=mc^2$. Contudo, na opinião do próprio autor foram os problemas da Mecânica Quântica que mais ocuparam o seu espírito e que mais o fascinaram. Apesar disso, e apesar da importância inegável que estes trabalhos de Albert Einstein tiveram para o desenvolvimento de toda a Física do século XX, são os artigos sobre o movimento Browniano os mais citados. Talvez por isso resolvi dedicar-lhes este pequeno trabalho de divulgação.

2. O movimento Browniano

À temperatura ambiente, digamos 300 K, consideremos um certo volume de oxigénio. Como sabemos, as moléculas de oxigénio estão em movimento. Movem-se em todas as direcções, aqui e acolá chocam umas com as outras e, evidentemente, chocam também com as paredes do recipiente que contém o gás. Este movimento é desordenado, isto é, cada molécula pode, com igual probabilidade, mover-se em qualquer direcção. Dito por outras palavras, o valor médio do **vector velocidade** é zero, i. e.

$$\langle \vec{v} \rangle = 0.$$

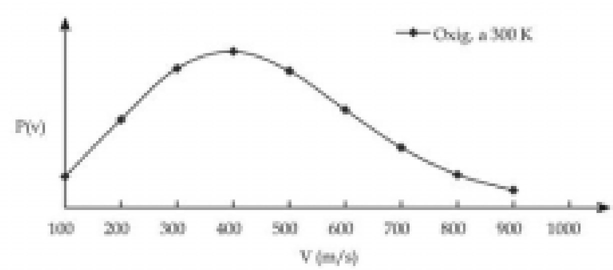
Contudo não é verdade que o valor médio do **módulo da velocidade** seja zero. Antes pelo contrário, Maxwell no final do século XIX mostrou que a lei de distribuição das velocidades é dada por:

$$P(v) = \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 , \qquad (1)$$

em que m é a massa da molécula, T a temperatura e k a constante de Boltzmann. A fórmula anterior é uma lei de distribuição de probabilidade o que significa que se fizer o integral para todos os v de zero a infinito devemos obter 1, i.e.

$$\int_0^\infty P(v)\,dv = 1 . \qquad (2)$$

A figura seguinte representa esta distribuição para o oxigénio a 300 K.

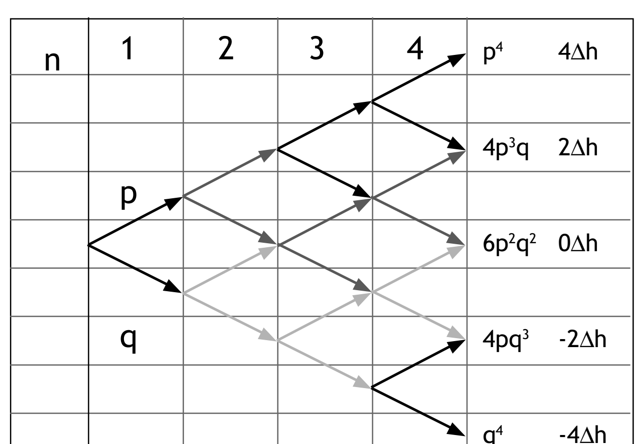


A curva mostra que as moléculas do oxigénio, à temperatura considerada, têm velocidades que se situam entre algumas dezenas de metro por segundo e o milhar de m/s. A curva apresenta um máximo a cerca de 400 m/s o que significa que esta é a velocidade mais provável.

Se em vez de um gás considerarmos um líquido, também se verifica que as suas moléculas estão em movimento desordenado. A primeira evidência experimental deste movimento foi descrita em 1827 por um naturalista Britânico, Robert Brown, que observou ao microscópio o movimento desordenado de pequenos grãos de pólen em suspensão em água. Dado que o movimento nunca parava, inicialmente Brown chegou a pensar que estaria a observar um ser vivo. Contudo, depois de várias experiências conseguiu mostrar que esta hipótese era falsa e que o efeito se observava com grãos, de qualquer material inerte, cujas dimensões e peso lhes permitiam estar em suspensão na água. Não se tratava pois de um problema biológico mas sim físico. Dado que as leis da física excluíam a possibilidade da existência de movimento perpétuo como explicar que os grãos de pó nunca parassem?

No final do século XIX, vários físicos, adeptos da teoria atómica, tinham a convicção de que este movimento dos grãos de pólen era o resultado de serem incessantemente bombardeados pelas moléculas do líquido. O movimento era perpétuo porque, de alguma forma, o que se estava a observar era a agitação térmica das moléculas do líquido. Em 1905 Einstein apresentou uma explicação quantitativa convincente para o fenómeno. Tal explicação permitiu obter por meio do estudo do movimento Browniano, a determinação experimental do número de Avogadro, o que constituiu um poderoso argumento em favor da estrutura atómica da matéria. Recorde-se que, na altura, a existência de átomos ainda não era completamente aceite pela totalidade dos físicos.

Vejamos então os aspectos mais importantes desta explicação. Consideremos o movimento de um grão de pólen. De cada vez que observo que o grão se move, isto é o resultado de um número enorme de choques das moléculas do líquido. Procurar descrever cada um destes choques é uma tarefa impossível. Contudo o relevante é o carácter aleatório do movimento que deles resulta. Simplifiquemos ainda mais o problema e admitamos que este movimento se faz apenas numa direcção. Inicialmente o grão está na posição zero. Admitamos ainda que o grão tem uma probabilidade p de se deslocar Δh e q de se deslocar para a posição $-\Delta h$. Se mantivermos esta regra, ao fim de 4 movimentos as várias hipóteses para a posição final do grão são as que representámos no esquema seguinte. Escusado será dizer que os verdadeiros grãos de pólen em suspensão na água realizam movimentos a três dimensões e que os saltos erráticos que o Senhor Brown observou no seu microscópio não tinham todos o mesmo comprimento. Apesar disso, continuemos com o modelo. Muito do progresso da Física e de todas as outras ciências ficou a dever-se à possibilidade de substituir um problema complexo por outro mais simples.



Neste esquema, as setas indicam as sucessivas possibilidades de percurso. Na coluna da direita mostramos a probabilidade da ocorrência de um determinado caso e o deslocamento total obtido. Assim, se o grão avançar sempre Δh a probabilidade de ocorrência é p^4 e, no final, terá avançado $4\Delta h$. Esta situação corresponde à primeira linha do esquema. Na segunda linha o avanço total foi de $2\Delta h$ e isto ocorre com uma probabilidade $4p^3q$. O leitor poderá facilmente verificar que há quatro possíveis caminhos que podem conduzir a esta posição.

Calculemos agora o valor médio do deslocamento do grão. No primeiro salto temos:

$$\langle \Delta x \rangle = p\Delta h + q(-\Delta h) = (p-q)\Delta h\,. \tag{3}$$

No quarto salto teremos:

$$\langle \Delta x \rangle = p^4 4\Delta h + 4p^3q^2\Delta h + 6p^2q^2 0\Delta h + 4pq^3(-2\Delta h) + q^4(-4\Delta h).$$

Facilmente se reconhecerá que este problema obedece à distribuição binomial,

$$P[k] = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \tag{4}$$

e, portanto, ao fim de n saltos temos:

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \Delta h(n-2k)\,. \tag{5}$$

Se recordarmos que

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k \tag{6}$$

podemos, derivando em ordem a q e depois multiplicando por q, obter

$$nq = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{n-k}q^k k\,. \tag{7}$$

Com a ajuda das duas últimas equações é fácil completar o cálculo de $<\Delta x>$ e obter

$$\langle \Delta x \rangle = n(p-q)\Delta h\,. \tag{8}$$

O que é interessante neste resultado é que o deslocamento médio é proporcional a n, número de saltos, ou, numa descrição contínua, ao tempo decorrido desde o instante inicial. Se considerarmos o caso tridimensional, o que teremos é a descrição do movimento do grão, especificando a sua posição por um vector $\vec{r}$. O seu valor médio é, evidentemente, zero, dado que todas as direcções são igualmente prováveis. Contudo, o valor médio de r^2 não é nulo, é proporcional ao tempo t.

Einstein admitiu que o problema do movimento dos grãos de pólen era análogo à difusão, por exemplo, das moléculas de um gás noutro. Seja então n o número de grãos por unidade de volume. Num determinado volume V, a variação temporal do número de grãos é dada por:

$$\int dV \frac{\partial n}{\partial t}\,. \tag{9}$$

Por outro lado, esta variação é igual ao fluxo através da superfície que delimita o volume V de um vector $\vec{S}$ que é proporcional ao gradiente de n, i. e. com $\vec{S} = D\vec{\nabla} n$ obtemos:

$$\oint ds\vec{u}.D\vec{\nabla} n\,, \tag{10}$$

em que $\vec{u}$ designa o vector unitário da normal à superfície. Igualando as duas equações anteriores e usando o teorema da divergência, é fácil verificar que a distribuição dos grãos de pólen é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\right) \tag{11}$$

cuja solução é

$$n(x,y,z,t) = \frac{n(0)}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}\right). \tag{12}$$

Com $n(0)=1$ obtemos a distribuição normal. Usando esta distribuição de probabilidade podemos facilmente calcular o valor médio de r^2. O resultado obtido é

$$\langle r^2 \rangle = 2Dt\,, \tag{13}$$

em que D é o coeficiente de difusão. Aplicando as leis da Termodinâmica a este sistema, Einstein mostrou ainda que D depende da temperatura e da viscosidade do líquido e das dimensões dos grãos. Em particular para grãos esféricos com raio a em suspensão num líquido de viscosidade η à temperatura T tem-se:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{14}$$

Fazendo a experiência em água ($\eta = 0{,}8\ kg\ m^{-1}s^{-1}$), à temperatura ambiente e com grãos com 10^{-3} milímetros de raio obtemos um livre percurso médio de cerca de uma centésima de milímetro por minuto.

As equações (13) e (14) relacionam o valor médio de uma grandeza, uma flutuação, com a viscosidade que é uma grandeza que caracteriza a dissipação de energia no fluido. Para o mesmo tempo, em média o grão de pólen andará menos se o líquido for mais viscoso. Por outras palavras, terá um maior percurso médio na água do que em Drambuie. O kT caracteriza a energia média devida à agitação térmica das moléculas e quanto maior for esta energia, isto é, quanto maior for a temperatura, maior será o percurso médio do grão de pólen.

Alguns anos depois dos trabalhos de Einstein, o Físico Francês Jean Perrin realizou várias experiências que comprovaram a teoria que resumimos. Por outras palavras, medindo, em função do tempo, o percurso médio de grãos com dimensões conhecidas em suspensão em água, Perrin pôde determinar experimentalmente o valor da constante de Boltzmann, k.

3. Nota Final

No final do século XIX, a estrutura atómica e molecular da matéria, apesar de poder contar com muitos sucessos, estava ainda longe de recolher o apoio unânime de todos os Físicos. Esta ideia tinha essencialmente sido suportada pelos Químicos que progressivamente tinham vindo a estabelecer leis empíricas que procuravam explicar a razão para a ocorrência das reacções químicas. Se para fazer, por exemplo, água, é preciso juntar hidrogénio e oxigénio sempre numa determinada proporção relativa e o mesmo se passa para todas as reacções químicas, então parece plausível fazer corresponder a cada elemento um átomo. Deste modo, preciso de dois átomos de hidrogénio para cada átomo de oxigénio para fazer água e de um de cloro por cada um de sódio para fazer cloreto de sódio. Guiados por esta ideia faz sentido perguntar que tamanho tem um átomo? Ou, melhor ainda, que massa terá cada átomo? Foram também os Químicos que estabeleceram uma tabela relativa de massas atómicas, impropriamente chamada tabela de pesos atómicos. Por razões que não importa aqui detalhar foi escolhido como padrão 1/12 da massa do átomo de carbono[1] e esta quantidade designa-se como *amu* (unidade de massa atómica). Nesta escala, o oxigénio tem uma massa de 16 *amu* e o hidrogénio 1 *amu*. Estamos agora em condições de inverter a questão e perguntar: um grama de hidrogénio, ou dezasseis de oxigénio, quantos átomos são? Cerca de 6×10^{23} átomos. Este número enorme designa-se por número de Avogadro, N_A.

A constante de Boltzmann k é o quociente da constante dos gases R a dividir por N_A. O valor experimental de N_A obtido por Perrin estava em bom acordo com outras determinações desta grandeza feitas anteriormente, por outros processos. Desta forma, não só a teoria de Einstein foi verificada, como a hipótese atómica que a fundamentava resultou validada.

[1] Em rigor o padrão é o isótopo 12 do carbono.

Sete Passos em Topolo(ma)gia, IV

A função distância
é talvez maior
talvez até igual
de facto nula
no ar um ponto fixo
tu
vestido
ou não
de teorema

Teresa Maio