O teorema de Cantor-Bendixson

por J. Albuquerque (bolseiro em Roma do I. A. C.)

Um teorema muito importante, sôbre o qual desejamos chamar a atenção dos leitores da «Gazeta de Matemática», teorema que foi enunciado pela primeira vez por Bendixson em 1883, e é hoje universalmente conhecido por teorema de Cantor-Bendixson, afirma o seguinte:

Teorema de Cantor-Bendixson. *Todo o conjunto linear fechado é a soma de um conjunto perfeito e de um conjunto numerável.*

Trata-se de um teorema típico de estructura, e é essa a razão da sua importância e freqüente aplicação nas questões de análise.

Deram-se dêste teorema muitas demonstrações e poderiamos limitar êste artigo a uma delas que escolheriamos naturalmente entre as mais simples, mas o nosso procedimento vai ser outro. Procuraremos antes aprofundar o mais possível o estudo da estructura de um conjunto qualquer do espaço, e depois quási como coisa secundária surgirá uma demonstração, não do teorema, mas de uma proposição bastante mais geral e rica do que êle.

Como base dêste estudo deveremos dar algumas definições, mas limitaremos ao mínimo as noções e as propriedades do espaço que poremos em cena.

Consideremos um espaço onde cada ponto p tem a sua família de visinhanças V_p, e onde se dá a seguinte definição fundamental e imprescindível de ponto limite ou ponto de acumulação.

Difinição 1. Um ponto p do espaço, é ponto de acumulação de um conjunto E se e só se tôda a visinhança de p contiver pelo menos um ponto de E distinto de p.

Dado um conjunto E poderemos então falar do conjunto E' dos seus pontos de acumulação, conjunto chamado o derivado de E.

Definição 2. Um conjunto diz-se *denso em si* se está contido no seu derivado; portanto o conjunto X é denso em si se e só se $X \subset X'$.

Um conjunto diz-se *fechado* se contém o seu derivado; portanto o conjunto X é fechado se e só se $X' \subset X$.

Um conjunto diz-se *perfeito* se é simultâneamente denso em si e fechado; portanto o conjunto X é perfeito se e só se $X = X'$.

Um conjunto diz-se *clairsemé* se não contém um sub-conjunto denso em si não vazio.

Definição 3. Dado um conjunto X chama-se *coerência de* X, ao conjunto de todos os pontos comuns a X e ao derivado X'; a coerência é pois um operador que a cada X faz corresponder um conjunto bem determinado: $c(X) = X \cdot X'$. A coerência do conjunto X é evidentemente uma parte do conjunto X.

Postas estas definições, tomemos um conjunto qualquer A do espaço, e formemos a seguinte sucessão:

$$A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \cdots \supset c^n(A) \supset \cdots$$

e ponhamos por definição: $c^{\omega}(A) = \prod_{n=1}^{\infty} c^n(A)$, onde ω representa o primeiro número ordinal transfinito. De uma maneira geral, ponhamos para um número ordinal $\alpha < \Omega$ de segunda espécie, isto é, tal que não há um ordinal que o preceda imediatamente:

$$c^{\alpha}(A) = \prod_{\beta < \alpha} c^{\beta}(A),$$

onde β percorre todos os números ordinais que precedem α.

Temos assim a sucessão:

$$(1) \qquad A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \cdots \supset c^{\omega}(A) \supset \cdots \supset c^{\alpha}(A) \supset \cdots$$

A sucessão (1) verifica a seguinte importante propriedade:

P. *Cada têrmo da sucessão está ligado a* A *por uma cadeia de conjuntos cada um dos quais, ou tem um que o precede imediatamente e de que então é a coerência, ou não tem um que o precede imediatamente na cadeia e então é produto de todos os precedentes.*

A todo o conjunto do espaço ligado ao conjunto A por uma cadeia nas condições indicadas na propriedade P, chamaremos um *conjunto obtido de* A *por meio da operação* P.

É evidente que: *todo o têrmo da sucessão* (1) *é obtido de* A *por meio da operação* P.

Porém não se pode afirmar que: *todo o conjunto de* X *do espaço obtido de* A *por meio da operação* P, *pertence à sucessão* (1).

Considere-se então uma sucessão (2) definida por A e pela operação P, isto é, para a qual se possa afirmar que: *todo o conjunto* X *do espaço obtido de* A *por meio da operação* P, *pertence à sucessão* (2).

É evidente que todo o têrmo da sucessão (1) é um termo da sucessão (2).

Teorema 1. *A sucessão* (2) *tem um último têrmo que é um conjunto denso em si, nulo ou não.*

Demonstremos por absurdo, isto é, suponhamos que:

H. *A sucessão* (2) *não tem um têrmo denso em si* (nulo ou não).

Representemos por D o produto de *todos* os têrmos da sucessão (2) · O conjunto D pertence à sucessão (2) por ser obtido de A por meio da operação P. O conjunto D é pois o último têrmo da sucessão e não pode