PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1704 — Num círculo de centro O, marque-se sôbre o raio $\overline{OA}$, um ponto C; encontrar sôbre a circunferência um ponto P tal que o ângulo $\widehat{OPC}$ seja máximo.

(Bach. Letras e Matemática — Poitier — Nov. 1888).

1705 — Demonstrar que se num triângulo, os três ângulos A, B, C, são respectivamente proporcionais aos números $2,3,4$, tem-se: $\cos A/2=(a+c)/2b$.

1706 — Sabendo-se que o número $13xy45z$ é divisível por 792, achar os três algarismos x, y, z.

1707 — Três operários executam em certo praso uma obra que, dividida igualmente pelos três, tomaria o mesmo tempo a um dêles, menos dois dias a outro e mais três ao terceiro. De quantos dias é o praso?

Problemas 1704 a 1707 propostos por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1440 — Calcular o limite da soma de uma sucessão de fracções, cujos numeradores estão em progressão aritmética e os denominadores em progressão geométrica. Condição de convergência. (Aplicação numérica: $1/2+2/4+3/8+4/16+\cdots$). R: *O limite pedido é a soma* S *da série de termo geral* $u_n=\dfrac{a+r(n-1)}{bq^{n-1}}$ $(b\neq 0)$. *Tal série é absolutamente convergente para* $|q|>1$, *como se pode verificar pelo critério de D'Alembert. Com efeito,* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{q}$. *Para* $|q|=1$ *é visivelmente divergente. Escrevendo* $u_n=\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{n}{q^{n-1}}+\dfrac{a-r}{bq^{n-1}}$ *vê-se que a série pode ser considerada como a soma das duas séries de termos gerais* $\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{n}{q^{n-1}}$ *e* $\dfrac{a-r}{bq^{n-1}}$, *convergentes absolutamente para* $|q|>1$. *Ora, estas séries têm por valores: a segunda, soma dos termos duma* p. g. *decrescente* $S_2=\dfrac{a-r}{b(1-1/q)}$ *e a primeira, produto do factor finito* r/b *pelo valor da série de termo geral* $\dfrac{n}{q^{n-1}}$ $S_1=\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{1}{(1-1/q)^2}$. *Com efeito, para* $|x|<1$ $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$, *donde, por derivação, se obtém a série de termo geral* nx^{n-1} *cujo valor é, por conseqüência,* $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ *ou* $\dfrac{1}{(1-1/q)}$, *para* $|x|=\dfrac{1}{|q|}<1$. *É, pois,* $S=S_1+S_2=\dfrac{q[a(q-1)+r]}{b(q-1)^2}$

Aplicação numérica: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots$ *Fazendo na fórmula precedente* $a=0$ $b=1$ $r=1$ $q=2$, *acha-se* $S=2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

1507 — Resolver o sistema de equações: $x^2+y^2-(x+y)=48$, $x+y+xy=31$. R: *Pondo* $x+y=u$ $xy=v$, *será* $x^2+y^2=u^2-2v$ *e o sistema proposto escreve-se:* $u^2-2v-u=48$ *e* $u+v=31$. *Eliminando* v, *resulta a equação* $u^2+u-110=0$, *donde* $u_1=10$ $u_2=-11$, *valores a que correspondem os de* v, $v_1=21$, $v_2=42$. *Tem-se, então, para determinar* x *e* y *os dois sistemas* $x+y=10$, $xy=21$ *e* $x+y=-11$, $xy=42$, *de que são*