ANO IV - N.º 16 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO - 1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Generalizacion a la esfera del teorema de Pitagoras

por **Alfonso de Urquijo**

(aluno de la «Escuela de Ingenieros Agrónomos» de Madrid)

Damos a continuación el enunciado y demostración de un sencillo teorema de Geometría esférica, del cual no tenemos referencia, a pesar de las indagaciones hechas.

«Dado un triángulo esférico rectángulo en A, si consideramos los cuadriláteros construidos sobre la hipotenusa y ambos catetos, formados por los tres lados, y el arco de circulo máximo cuyo polo es el vértice opuesto al lado en cuestión, se verifica que el area del cuadrilátero esférico formado sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las areas de los cuadriláteros formados sobre los catetos.»

El exceso de un cuadrilátero esférico, o sea su area, como es sabido, es la suma de sus ángulos menos cuatro rectos. Veamos cual es el area del cuadrilatero $BCNM$ construido sobre la hipotenusa. Los ángulos en M y N son rectos, por pasar AM y AN por el polo A. El ángulo NCB es suplementario de C, el CBM, lo es del B.

Luego $S_a = S(BCNM) = 2 + (2-B) + (2-C) - 4 = 2-(B+C)$. El área de $ABPQ$ será: ángulos en P y Q rectos, ángulo QAB es tambien recto, por ser suplementario del A, y ángulo ABP suplementario del B, luego $S_c = S(ABPQ) = 3 + (2-B) - 4 = 1 - B$. Analogamente $S_b = S(ACRT) = 1 - C$. Luego $S_a = S_b + S_c$.

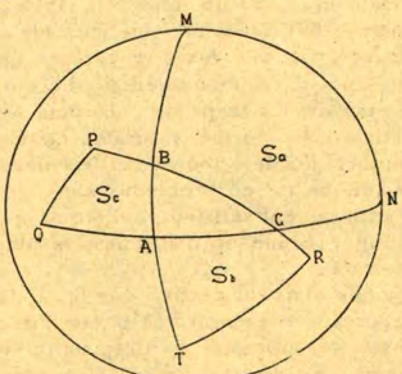
Puede ocurrir que alguno o algunos de los cuadriláteros que se formen sean cóncavos, nuestro teorema es igualmente válido en estos casos, sin mas que orientar el perímetro de los cuadriláteros en un sentido cíclico, teniendo en cuenta el principio de Gauss para los signos de las areas.

Por último, si el triángulo no es rectángulo, efectuadas construcciones análogas, resulta el seguiente teorema:

«El área del cuadrilátero construido sobre un lado, es igual a la suma de las areas de los cuadriláteros construidos sobre los otros dos lados, menos el área del huso que tenga por ángulo un recto menos el opuesto al lado en cuestión».

$$S_a = S_b + S_c - H_{90-A}$$

La demostración es immediata.



Sumando

$$\begin{aligned} S_a &= S_b + S_c - H_{90-A} \\ S_b &= S_c + S_a - H_{90-B} \\ S_c &= S_a + S_b - H_{90-C} \\ \hline S_a + S_b + S_c &= H_{90-A} + H_{90-B} + H_{90-C} = \\ &= H_{270-(A+B+C)} = H_{90-2E} \end{aligned}$$

Es decir que la suma de las tres areas es equivalente al area de un huso cuyo ángulo vale un recto menos el exceso del triángulo dado.