Uma função contínua sem derivada

por R. Tambs Lyche (Trondheim, Noruega)

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 208-211)

1. O exemplo dado por Weierstrass duma função contínua que não admite derivada para nenhum valor da variável é muito complicado para que se possa expor num curso elementar de Análise. Deve-se a M. B. L. van der Waerden (Math. Zeitschr. 32 Band, 1930, pag. 474) um exemplo de natureza bem simples. Apesar disso, para ser apresentado duma maneira inteligente aos principiantes, a demonstração exige considerações um pouco complicadas, se bem que sejam de natureza elementar. (Ver, por exemplo, E. Landau: Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, pag. 73, onde o autor examina um exemplo da mesma espécie).

Dada a importância duma concepção precisa da noção de derivada, parece-nos útil fornecer um exemplo em que a demonstração pode ser dada em poucas linhas. Aquêle que proponho não difere no fundo do de M. van der Waerden, a não ser na maneira de o definir.

2. Seja x uma quantidade real qualquer, e ponhamos

$$x=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}+\cdots \qquad (1)$$

onde a é um número inteiro e $\{\alpha_i\}$ uma sucessão de números naturais crescentes, em número ilimitado ou não. É sabido que esta representação de x é única, salvo no caso em que a sucessão $\{\alpha_i\}$ é limitada:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k}} \qquad (2)$$

Pois neste caso tem-se também a representação:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k+1}}+\frac{1}{2^{\alpha_k+2}}+\cdots \qquad (2a)$$

Ponhamos agora

$$f(x)=\frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}}+\frac{\alpha_2-2}{2^{\alpha_2}}+\frac{\alpha_3-4}{2^{\alpha_3}}+\cdots+\frac{\alpha_i-2(i-1)}{2^{\alpha_i}}+\cdots \qquad (3)$$

Verifica-se fàcilmente que $f(x)$ é definida por esta fórmula para todo o valor real de x, pois que um cálculo fácil mostra que as duas definições possíveis, se x é da forma (2) ou (2a), coincidem.

Êste último facto assegura a continuïdade da função $f(x)$ em qualquer ponto. Com efeito, tomando $|h|<\frac{1}{2^n}$ as representações de x e de $x+h$ coincidem nos termos de expoentes $<n$. Isto é evidente no caso geral (1), e terá ainda lugar no caso (2 ou 2a) segundo $h>0$ ou $h<0$. Por conseqüência as expressões para $f(x)$ e $f(x+h)$ coincidirão também nos termos de expoentes $<n$. A continuïdade é por isso manifesta.

3. Demonstremos agora que $f(x)$ não admite derivada em nenhum ponto x. Consideremos primeiro o caso em que x é da forma (2). Tomemos $h=\frac{1}{2^{\alpha_k+r}}$. Segue-se que $f(x+h)-f(x)=\frac{\alpha_k+r-2k}{2^{\alpha_k+r}}$ donde $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha_k+r-2k$ quantidade que tende para infinito com r.

Tomemos o caso geral, em que x é da forma (1). Ponhamos

$$x_1=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}$$

$$x_2=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i-1}}.$$

Acha-se neste caso

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\tau_i}{\rho_i},\quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{\alpha_i-2i-\tau_i}{1-\rho_i}$$

pondo para abreviar

$$\rho_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{1}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{1}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \qquad (4)$$

$$\tau_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{\alpha_{i+1}-2i}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{\alpha_{i+2}-2(i+1)}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \qquad (5)$$

Suponhamos agora que $f(x)$ tem uma derivada $f'(x)=\lambda$ no ponto x. Então ter-se-á, por um lado

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda \qquad (6)$$

Mas por outro a expressão

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\alpha_i-2i-\frac{\tau_i}{\rho_i}}{1-\rho_i}$$

deveria tender para zero quando i aumenta. Ora isso exige que $\lim_{i\to\infty}(\alpha_i-2i)=\lambda$, e sendo α_i e $2i$ inteiros, ter-se-ia, a partir de um certo valor de i, $\alpha_i-2i=\lambda$. Mas se pusermos em (4) e (5) $\alpha_i=2i+\lambda$ ter-se-á $\rho_i=\frac{1}{3}$ $\tau_i=\frac{\lambda+2}{3}$ e por isso $\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda+2$ o que é impossível em virtude de (6).