FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

OS *QUANTA* DE WALLIS

A constante matemática mais conhecida é π, a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, em qualquer círculo. Muitos esforços foram feitos na História humana para encontrar o seu valor, ou, pelo menos, uma boa aproximação. Mesmo hoje em dia, há competições para ver quem o calcula com mais precisão em menos tempo. Há quem goste de exibir a sua memória, dizendo de cor mais e mais de seus dígitos. Uma antiga forma de o calcular, obtida pela primeira vez no séc. XVII, foi recentemente redescoberta nos confins do infinitamente pequeno: no mundo quântico.

A primeira constante matemática a que nós somos apresentados é $\pi \approx 3,1415926536\ldots$ (diz-se "pi"). Lembro-me até de uma pequena frase que me foi ensinada, de forma a melhor memorizar a sua expansão decimal: *nós e todo o mundo decoramos pi usando letra por número*. Ao substituir cada palavra pelo seu número de letras, encontramos a expansão decimal do nobre número. π é a razão entre a circunferência e o diâmetro de qualquer círculo. Durante anos, a sua própria existência intrigava-me. Afinal, porque é que este resultado não depende do círculo em questão? Nada melhor do que fazer uma experiência, própria para salas de aulas com crianças a serem apresentadas ao conceito pela primeira vez. Com um compasso desenha-se uma circunferência; um pedaço de corda serve para a medir. Com uma régua, temos o diâmetro. Dividimos uma pela outra e... dá tudo errado! Encontrávamos desde 2 e pouquinho até 4 e qualquer coisa. Dificilmente alguém se convencia de que este número fazia sentido. Ao fazer a média sobre várias experiências realizados na sala de aula, a resposta *estranhamente* aproximava-se do valor esperado, mas isto é assunto para outra crónica...

A ideia de que a razão circunferência/diâmetro não depende do raio do círculo em questão é, como diria Fernando Pessoa, algo que "primeiro estranha-se, depois entranha-se". E isto necessariamente ocorre, pois π é tão presente na Natureza que questioná-lo implica pôr em dúvidas quase todo o conhecimento científico. Em problemas onde mesmo o olho mais bem treinado não vê uma circunferência, encontramos o omnipresente $3,14159\ldots$

O francês George Buffon foi, aparentemente, uma das primeiras pessoas a conceber uma experiência de contagem simples capaz de expressar uma aproximação de π. Nesta experiência atiram-se agulhas de tamanho fixo sobre um piso de riscas paralelas, cujo espaçamento é constante e igual ao do comprimento das agulhas. Conta-se a quantidade de agulhas que caem sobre duas riscas distintas, e, ao dividir pela quantidade total de agulhas, encontramos $2/\pi$. Uma grande vantagem sobre o método direto anterior é que este não envolve medições, sempre imprecisas, mas contagens, muito mais fáceis de fazer. Veja a figura 1.

Cem anos antes, no entanto, um outro matemático,

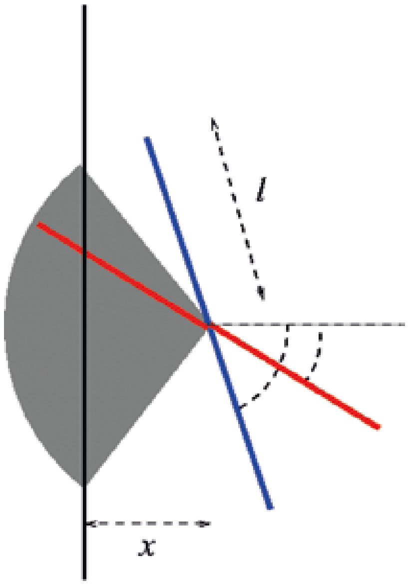


Figura 1. O centro de uma agulha de tamanho $2l$ caiu no solo a uma distância $x \in [0, l]$ da risca mais próxima, num piso com riscas paralelas espaçadas de $2l$. O ângulo da agulha com a direção das listas é dado por $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. A agulha será contabilizada na experiência de Buffon se $\theta \in \left[-\arccos\frac{x}{l}, \arccos\frac{x}{l}\right]$, que corresponde à região escura. Portanto, uma agulha que caiu no ponto x tem probabilidade $\frac{2\arccos\frac{x}{l}}{\pi}$ de ser contabilizada. Considerando todos os valores de x e que $\int_0^1 \arccos x dx = 1$, encontramos o resultado desejado.

Jonh Wallis, criptógrafo real inglês, também se ocupava de formas mais práticas de calcular π, já ciente da dificuldade de medir linhas curvas. Encontrou uma expressão para π que pode ser calculda por aproximações sucessivas:

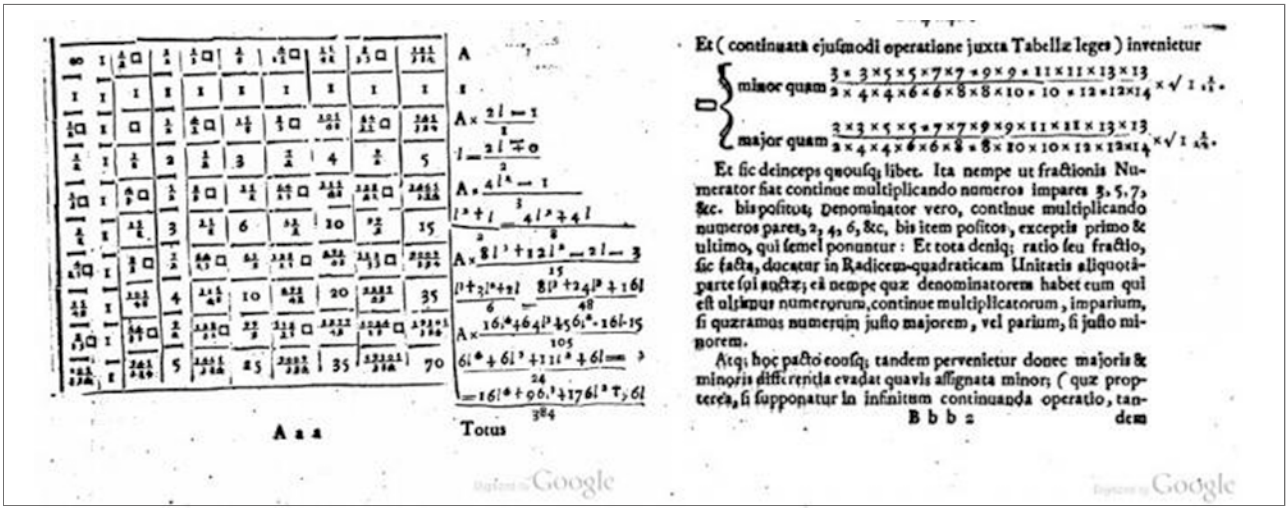
$$\pi = 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \ldots$$

A demonstração apresentada por Wallis era baseada nas recém descobertas técnicas de cálculo integral; um leitor moderno pode refazê-la usando sucessivas integrações por partes da função $I(n) = \int_0^\pi \mathrm{sen}^n\, x dx$. Veja a figura 2.

É esta a fórmula encontrada numa recente investigação, feita pelos físicos americanos Tamar Friedman e C. R. Hagen [1]. Ao estudar o espectro do átomo de hidrógenio, o objeto de estudo central da física atómica, encontraram a curiosa expressão do inglês, aumentando ainda mais a omnipresença do π em todos os ramos do conhecimento. Apesar de haver muitas demonstrações da fórmula de Wallis, esta é a primeira baseada em física quântica e atómica.

A equação básica da mecância quântica é a equação de Schrödinger, uma equação das derivadas parciais envolvendo o tempo e as variáveis espaciais. O conjunto dos valores próprios da parte espacial da equação é o



Aaa

Totus

Et (continuatâ ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{14}}. \end{cases}$$

Et sic deinceps quousq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota deniq; ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquotâ parte sui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

Atq; hoc pacto eousq; tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis assignata minor; (quæ propterea, si supponatur in infinitum continuanda operatio, tandem

Bbb 2

Figura 2. Imagem do livro *Arithmetica Infinitorum* por John Wallis (Oxford, 1655). No texto à esquerda, o símbolo □ refere-se a $4/\pi$. **Fonte:** *http://www.eurekalert.org/multimedia/pub/102980.php*, digitalizado pela Google.

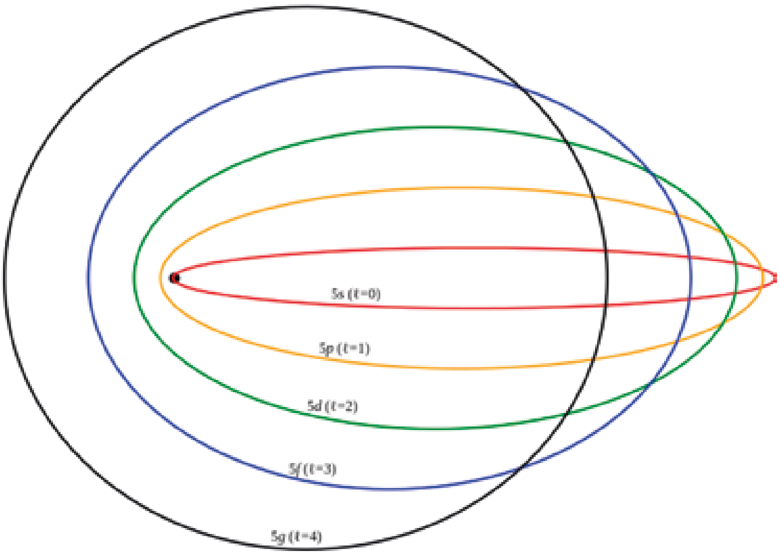


Figura3. Modelo semi-clássico do átomo de Hidrogénio, conhecido como "modelo de Bohr-Sommerfeld". Dado um mesmo valor de energia (indicado pelo número quântico principal, no caso $n = 5$), quanto maior o valor do momento angular, medido por ℓ, mais aproximadamente circular é a órbita. **Fonte:** Wikimedia Commons, *https://en.wikipedia.org/wiki/Bohr_model.*

que um matemático chama de *espectro*. Um físico prefere pensar nos mesmos números como os diferentes níveis de energia permitidos aos eletrões em órbita do núcleo.

A equação de Schrödinger do átomo de hidrogénio pode ser resolvida de forma exata, utilizando os chamados *polinómios de Laguerre*. No entanto, a ideia que surgiu da união de um físico de partículas com uma física de altas energias foi diferente. Em vez de utilizar a solução exata, optaram por aproximar o polinómio de Laguerre pelo seu termo dominante. Acontece que esta aproximação será tão melhor quanto maior for o momento angular ℓ do átomo de hidrogénio. Isto decorre do facto de que para momentos angulares altos, as órbitas do eletrão ao redor do núcleo são aproximadamente circulares. Veja a figura 3.

Desta forma, a razão entre o valor aproximado obtido nesta nova investigação e o valor exato há muito conhecido aproxima-se de 1 quando ℓ tende a infinito. Daí se segue que

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{(\ell+1)^2}{(\ell+\frac{3}{2})^2}\left[\frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})}\right]^2 = 1\ .$$

Na equação acima, foi utilizada a função Γ (diz-se "gama"), uma generalização dos fatoriais para números não naturais. Utilizando as propriedades desta função, encontramos a relação de Wallis. Nada mal para um inglês que presenciou o nascimento da física clássica poder ver o seu nome associado à mecânica quântica!

BIBLIOGRAFIA

[1] Tamar Friedmann e C. R. Hagen. "Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π". *Journal of Mathematical Physics* 56, 112101 (2015)