ANTIDERIVAÇÃO: UMA PONTE ENTRE A MATEMÁTICA E A ECONOMIA

Beites, P. D.[a], Lobo, F. J.[b], Serôdio, R.[c]

Universidade da Beira Interior[a, b, c]

pbeites@ubi.pt[a], fernando_j_lobo_m@hotmail.com[b], rserodio@ubi.pt[c]

A data de 10/12/2014 assinalou a abertura da Academia Júnior de Ciências da Universidade da Beira Interior aos melhores alunos de ciências das escolas secundárias da região. De entre as sessões integrantes do ano letivo 2014/2015, norteadas pela física, pela matemática e pela química, uma foi dedicada à antiderivação. Apresentamos os materiais nesta utilizados, porventura úteis para a implementação do novo programa de matemática para o ensino secundário, e considerações associadas.

Na Academia Júnior de Ciências (AJC) da Universidade da Beira Interior (UBI), o fio condutor da sessão intitulada "Antiderivando" foi dado pela interligação matemática de dois conceitos económicos: custo total e custo marginal. O título poderia ter sido "Primitivando", mas adotámos a terminologia de algumas referências, nomeadamente [8], num claro apelo conjunto à já conhecida noção de derivada e a um caminho contrário ao da derivação.

No que se segue, começamos por passar em revista os referidos conceitos económicos, sem esquecer, como não poderia deixar de ser, as suas conexões com a matemática. Como a sessão foi dinamizada de uma forma próxima à aprendizagem pelos pares, dedicamos uma secção a este método de ensino-aprendizagem. Terminamos com um relato comentado da sessão em que se destacam os materiais que edificaram a ponte entre a matemática e a economia.

1. CUSTO TOTAL E CUSTO MARGINAL

Uma organização que produz bens/produtos ou serviços com o propósito de os vender é designada por empresa, [4]. Esta, para o concretizar, tem de transformar fatores de produção (*inputs*, tais como matéria-prima, equipamento, capital, horas de trabalho, etc.) num produto (*output*)[1]. Em microeconomia, a relação entre as quantidades de *inputs* e de *output* exprime-se através da chamada função de produção dessa empresa. Subjacentes a esta função encontram-se as curvas de custos, que são as representações gráficas de funções de custo.

Conhecida a função de produção de uma empresa, no sentido da maximização dos lucros desta, esse conhecimento pode ser convertido em informação sobre a relação entre a quantidade de *output* e o custo. Para isso é necessário saber quanto é que a empresa paga pelos seus fatores de produção, custo que pode ser fixo, não dependendo da quantidade de *output* produzido, ou variável, dependendo da quantidade de *output* produzido.

No contexto da produção de um bem por uma empresa, a soma das duas expressões analíticas que traduzem o custo fixo (CF) e o custo variável (CV), respetivamente, define a função custo total (CT):

$$CT = CF + CV.$$

Denotando o número de unidades do produto por q, $CT(q)$ representa o custo total de produzir q unidades do produto com $CT(q) = CF + CV(q)$.

No segundo membro da igualdade destacada, a primeira parcela é, por vezes, em contexto empresarial, denominada por custo geral. Em detrimento desta, as designações mais utilizadas são a já mencionada de custo fixo ou a de custo de estrutura, esta por traduzir o custo de ter toda a estrutura produtiva da empresa montada, independentemente de haver ou não produção.

Duas medidas úteis de custo de produção que podem obter-se a partir do custo total são designadas por custo marginal e por custo médio. Elas servem, por um lado, para a empresa decidir quanto vai produzir para maximizar lucros e, por outro lado, para estudar a curva da oferta de mercado. No que se segue, limitamo-nos a considerar o custo marginal, mas mais detalhes sobre a aplicação da análise marginal podem ser consultados em [4].

Para os economistas, o custo marginal (CM_g) associado à produção de um bem é a mudança no custo total gerada pela produção de mais uma unidade do bem. Esta definição traduz o facto de a função custo marginal ser a deri-

[1] Daqui em diante e por uma questão de simplificação, assumimos apenas empresas de tipo industrial, isto é, em que os *outputs* são produtos acabados, deixando-se de fora os serviços, dada a maior complexidade de conceitos potencialmente envolvidos e que não seriam aqui relevantes. No mesmo sentido, pensamos no *output* como sendo um só produto.

vada da função custo total só de uma forma aproximada. Concretamente, a mesma indica que se olhe para a razão[2]

$$CM_g = \frac{\Delta CT}{\Delta q} \text{ quando } \Delta q = 1,$$

embora na definição formal de custo marginal, como se refere em [7], se tenha

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta CT}{\Delta q}.$$

Matematicamente, $CM_g(q+1)$, o custo marginal que representa o custo exato de produzir a $(q+1)$-ésima unidade do produto, pode ser aproximado por $CT'(q)$. De facto,

$$CT'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{CT(q+\Delta q) - CT(q)}{\Delta q}$$

e

$$CT'(q) \approx \frac{CT(q+\Delta q) - CT(q)}{\Delta q},$$

pelo que $CT'(q) \approx CT(q+1) - CT(q)$ se $\Delta q = 1$, ou seja, $CT'(q) \approx CM_g(q+1)$.

Como se refere em [4], o cálculo do custo marginal é mais simples se os dados relativos ao custo total estiverem disponíveis em incrementos de uma unidade de *output*. É claro que, neste caso, se está a pensar na definição dos economistas, que pode ser expressa por ΔCT. Formalmente, a função custo marginal pode obter-se derivando a função custo total e, sabendo o custo fixo, a função custo total pode obter-se primitivando a função custo marginal.

Assim, formalmente, na perspetiva da análise marginal, é habitual escrever CT' em vez de CM_g.

2. APRENDIZAGEM PELOS PARES

No final da década de 1970, uma série de conversas mantidas entre David Hestenes (físico da Universidade do Arizona) e um dos seus colegas que lecionava Introdução à Fisica despoletou, anos mais tarde, a criação de um método de ensino-aprendizagem. Este, aqui designado por aprendizagem pelos pares, foi chamado de *Peer Instruction* por Eric Mazur (físico da Universidade de Harvard), [3].

O colega de Hestenes queixava-se da baixa média das classificações dos seus alunos, o que sucedia ano após ano. A partir das referidas conversas, Hestenes conjeturou que tal se devia ao tipo de questões que avaliavam os alunos, as quais não se reduziam a mero cálculo e careciam da compreensão dos conceitos envolvidos. Por outras palavras, eram questões conceptuais.

Para testar a sua conjetura, em conjunto com o seu aluno de pós-graduação Ibrahim Halloun, Hestenes criou um teste de questões conceptuais de física, designado por *Force Concept Inventory* (FCI), e realizou vários estudos. Destes extraiu a conclusão, no mínimo surpreendente, que os alunos não aprendem nada, ou quase nada, nas aulas (tradicionais) de unidades curriculares de introdução à física para cursos que não são de física.

Mazur leu os estudos e achou que a conclusão não se aplicaria ao seu contexto. Além de se considerar um bom professor, os seus alunos tinham boas classificações em testes mais complicados do que o FCI. Ainda assim, implementou-o e ficou chocado, não só com os resultados mas também com as perguntas dos alunos, estas sobre se deveriam responder de acordo com o que ele tinha ensinado ou com o que eles pensavam sobre o assunto.

Os alunos também ficaram chocados com os resultados obtidos no FCI e, para passarem em revista todas as questões, pediram uma sessão de contacto extra a Mazur. Como Mazur conta em [6], uma das questões analisadas era a de saber se, numa colisão de um camião pesado com um carro ligeiro, a intensidade da força exercida pelo camião sobre o carro era maior, menor ou igual à intensidade da força exercida pelo carro sobre o camião.

Quanto à citada questão, Mazur justificou a igualdade invocando a 3.ª Lei de Newton ou Lei da Ação-Reação. Mas houve alunos que nem compreendiam nem conseguiam articular as suas dúvidas, mesmo depois de mais uma explicação. Tendo em conta que cerca de metade dos alunos tinha respondido corretamente à questão no FCI, Mazur disse-lhes para discutirem o assunto entre eles. Gerou-se o caos, mas a discussão resultou!

A resposta para o sucesso é simples: muitas vezes os alunos entendem-se melhor falando entre eles do que ouvindo o professor. De facto, os alunos que aprenderam recentemente um conceito ainda se lembram das dificuldades, mas o professor aprendeu-o há tanto tempo, sendo para ele tão óbvio, que já não compreende como é que alguém não o entende. Nas palavras do psicólogo Steven Pinker, citado por Mazur em [6], é a "maldição do conhecimento".

Mazur, que tinha questionado a própria prática e a forma como chegava aos alunos, encontrou a solução de uma forma absolutamente inesperada. Na década de 1990 criou a aprendizagem pelos pares. Este método de ensino--aprendizagem é centrado no aluno, visando desenvolver a sua autonomia. Pretende ainda a substituição da mera transferência do conhecimento pela assimilação do mesmo e, indissociavelmente, a aprendizagem conceptual ativa.

Previamente a uma aula com aprendizagem pelos pares, os alunos devem estudar um tópico, indicado pelo professor, e resolver um trabalho de casa associado. Este, a entregar antes dessa aula, é formado por três questões: as duas primeiras abordam aspetos, preferencialmente difíceis, do estudo; a terceira visa a escrita das dúvidas e dificuldades emergentes do estudo, obtendo-se pistas para a planificação.

Na aula, tipicamente, há eventos de votação. Cada evento começa com a proposta de uma questão conceptual de escolha múltipla. Os alunos dispõem de cerca de dois minutos para a lerem, pensarem e decidirem individualmente qual a opção correta. Depois votam, por exemplo com cartões coloridos ou com um sistema eletrónico de resposta pessoal, e o professor decide o próximo passo com base na percentagem (c) não divulgada de respostas corretas.

Quando $35\% \leq c \leq 70\%$, os alunos dispõem de entre dois a quatro minutos para discutirem as suas respostas com os seus pares, ou seja, os outros alunos. Entretanto, o professor circula pela sala de aula, ouvindo e promovendo discussões frutíferas como agente mediador. Seguem-se uma segunda votação, em que c geralmente aumenta, e, por fim, a explicação da opção correta ou pelo professor ou por um aluno voluntário.

Destaque-se que o objetivo do debate é os alunos discutirem entre si as possíveis respostas corretas. Geralmente, é mais fácil um aluno que saiba a resposta correta convencer outro que não saiba do que ao contrário. Além disso, segundo Maher em [5], "quando os alunos tentam convencer os outros de que as suas respostas estão corretas, eles podem reorganizar e reformular as suas representações de modo a tornar os argumentos convincentes."

Se $c > 70\%$, então passa-se diretamente para a explicação da opção correta, uma vez que a discussão não seria frutífera, por grande parte dos alunos ter respondido corretamente. Se $c < 35\%$, então revisita-se o conceito, pois tal pode indicar que apenas alguns alunos o compreendem. Mais detalhes podem ser consultados em [1] e referências aí citadas.

3. ANTIDERIVANDO NA AJC

Começámos a sessão "Antiderivando" com uma introdução aos custos de produção, nomeadamente com a noção de custo total e suas componentes (custo fixo e custo variável). Utilizámos uma situação modelada simples, que consistiu na produção de mesas em que, assim que se iniciasse a produção, os custos fixo e variável unitário (por cada mesa) eram, respetivamente, 100 e 10 unidades monetárias (u.m.). Salientamos que supusemos que $CT(0) = 0$, pois assumimos que seria uma nova linha de produção de uma empresa, pelo que não existiria qualquer custo fixo associado antes de se iniciar a produção.

Com a participação dos alunos, construímos uma tabela, correspondente às seis primeiras linhas e às quatro primeiras colunas da Tabela 1, até chegarmos ao modelo matemático do custo total dado pela função definida por

$$CT(q) = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ 100 + 10q, & q > 0 \end{cases},$$

onde q é o número de unidades do produto e $CV(q) = CV_u \times q$, em que CV_u denota o custo variável unitário.

Procurámos que os alunos compreendessem que o custo marginal, seguindo a definição dos economistas, consistia no incremento provocado no custo total com a produção de mais uma mesa. Novamente com a participação dos alunos, acrescentámos a quinta coluna na Tabela 1, onde

$$CM_g(q) = CT(q) - CT(q-1)$$

representa o custo marginal de produzir a q-ésima unidade do produto (mesa).

Por forma a salientar que o custo marginal nem sempre é igual ao custo variável unitário, supusemos que, para produzir uma sexta unidade, teria de se adquirir uma nova máquina e contratar mais um funcionário. Assumimos ainda que tal se traduziria num aumento dos custos fixos para 200 u.m., tendo os alunos concluído que a produção da sexta unidade teria um custo marginal de 110 u.m. como surge na Tabela 1.

q	CF	CV_u	CT	CM_g
1	100	10	$100{+}1{\times}10 = 110$	110-000=110
2	100	10	$100{+}2{\times}10 = 120$	120-110=10
3	100	10	$100{+}3{\times}10 = 130$	130-120=10
4	100	10	$100{+}4{\times}10 = 140$	140-130=10
5	100	10	$100{+}5{\times}10 = 150$	150-145=10
6	200	10	260	110
7	200	10	270	10
8	200	10	280	10
9	200	10	290	10
10	200	10	300	10

Tabela 1. **Custo total e custo marginal em função de *q*.**

[2] Como usualmente, a letra grega maiúscula delta (Δ) significa "variação/mudança em".

Para finalizar a introdução aos custos de produção, foram colocadas as seguintes perguntas aos alunos.

- Se, no mercado, conseguir comprar este mesmo produto por 75 u.m.:
  Se não estiver a produzir, deverei iniciar a produção por uma unidade?
  E se já estiver a produzir duas unidades, deverei produzir uma 3.ª unidade?
  E se já estiver a produzir quatro unidades, deverei produzir uma 5.ª unidade?
  Estando já a produzir cinco unidades, se num determinado momento tiver uma encomenda de mais uma unidade, então como devo satisfazê-la?

- E se forem mais duas unidades? Como deverei satisfazer esta encomenda adicional de mais duas unidades?

A resposta à primeira foi unanimemente negativa, dado que no mercado conseguiríamos comprar essa unidade mais barata (75 u.m.) do que nos custaria produzi-la ($CT(1)$ = 110 u.m.). Quanto às segunda e terceira perguntas, as respostas foram unanimemente afirmativas após algumas discussões, pois, apesar de $CT(3)$ = 130 u.m. e $CT(5)$ = 150 u.m., estando já a produzir, $CM_g(3)$ e $CM_g(5)$ seriam inferiores ao custo de mercado de cada uma dessas unidades.

Relativamente à quarta questão, os alunos concluíram que a empresa deveria adquirir a sexta unidade no mercado. De facto, nas u.m. adequadas, $225 = CT(5) + 75 < CT(6) = 260$. Na quinta questão, agora com a encomenda de duas unidades adicionais, a conclusão dos presentes foi no sentido de a empresa aumentar a sua capacidade produtiva de modo a poder satisfazer internamente a totalidade da encomenda. De facto, $CT(7) = 270 < 300 = CT(5) + 2 \times 75$.

Em face das respostas dadas pelos alunos, verificámos que os mesmos compreenderam plenamente o conceito de custo marginal e a sua aplicabilidade na vida empresarial.

De seguida, no sentido descrito na Secção 1, salientámos as duas definições de custo marginal. No que se refere à definição formal, deduzimos a ligação $CM_g(q+1) \approx CT'(q)$ e resumimo-la esquematicamente

$$\begin{tikzcd} CT \arrow[d, bend left, "\text{derivação}"] \\ CM_g \arrow[u, bend left, "\text{antiderivação e custo fixo}"] \end{tikzcd}.$$

Notámos que, na situação modelada, a ligação só faz sentido para $q > 0$. De facto, CT não é diferenciável em $q = 0$ por CT não ser contínua em $q = 0$.

Com base em [7], avançámos com a proposta de encontrar a expressão analítica de uma função de custo total, sabendo a expressão analítica da função de custo marginal e o custo fixo.

> A função que permite calcular o custo marginal de determinado produto é dada por
>
> $$CT'(q) = 3q^2 - 30q + 120.$$
>
> Se a empresa tiver um custo fixo de 100 u.m. para este produto, qual a função de custo total do produto?

Como os alunos estavam a frequentar o 12.º ano com o Programa de Matemática A anterior a [2], não conheciam o conceito de antiderivada nem o termo frequente de primitiva. Sendo o mesmo necessário para conseguirmos andar ao contrário da operação de derivação, daí o prefixo anti como referimos aos alunos na primeira designação, propusemos algumas tarefas preparatórias. Estas foram guiadas pelos princípios da aprendizagem pelos pares.

A primeira proposta consistiu na questão conceptual 1 (QC1) subsequente, adaptada de uma chamada *good question* em [9]. Os resultados da primeira votação constam da Tabela 2, não tendo havido segunda votação pelos mesmos. Nesta tabela apresentamos ainda os resultados em duas unidades curriculares de dois cursos (CI e CII), com turnos TP1 e TP2, lecionadas por Beites e Serôdio na UBI em 2014/2015.

Opção	AJC	TP1 do CI	TP2 do CI	TP1 do CII	TP2 do CII
A	10%	25%	4%	4%	0%
B	90%	75%	96%	96%	100%

Tabela 2. **Dados da primeira votação relativos à QC1.**

QC1 – Verdadeiro ou falso?
Se f e g são duas funções reais de variável real tais que $f'(x) = g'(x)$, então $f(x) = g(x)$.

(A)Verdadeiro
(B) Falso

Após mencionarmos a opção correta, um aluno voluntário explicou porquê. Especificamente, disse que as funções r e s, reais de variável real dadas pelas expressões analíticas $r(x) = x^2 + 5$ e $s(x) = x^2 + \sqrt{2}$, têm a mesma derivada definida por $2x$, mas $r(x) \neq s(x)$. A fundamentação dos restantes alunos que votaram na opção B foi, a menos de funções escolhidas, essencialmente a mesma.

Passámos para a proposta de leitura individual da definição de antiderivada, acompanhada da questão associada subsequente. Esta variação na aprendizagem pelos pares, estudo na sessão "Antiderivando" em vez de ser prévio como trabalho de casa, prendeu-se com o facto de não termos uma sessão antecessora. Observámos que todos os alunos escreveram exemplos, mas alguns escreveram ainda $x^2 + K$, com K constante, e $(x^2 + K)' = 2x + 0 = 2x$, como verificação.

Sejam f e F duas funções reais de variável real definidas num intervalo I ($f, F : I \to \mathbb{R}$). Diz-se que F é uma antiderivada (ou primitiva) de f no intervalo I se, para qualquer $x \in I$, $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.
Elabore uma lista de antiderivadas da função real de variável real definida por $2x$.

Por uma questão de completude, apresentamos a versão integral do trabalho de casa implementado por Beites, na UBI, em 2014/2015.

TPC 13/10/2014: estudo da página 353 da referência "Cálculo" de Stewart e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes.
Entrega do TPC 13/10/2014: no início da próxima aula.

1. O que é uma antiderivada de uma função real de variável real?
2. Elabore uma lista de antiderivadas da função real de variável real definida por $2x$.
3. O que achou difícil ou confuso na leitura? Se nada foi difícil ou confuso, então diga o que lhe pareceu mais interessante. Por favor, seja o mais específico possível.

De modo a deduzir algumas regras de primitivação imediata, propusemos a tarefa seguinte, que foi resolvida a pares.

Preencha a tabela subsequente onde f e g são funções reais de variável real (f.r.v.r.) primitiváveis, num intervalo I, e $k \in \mathbb{R}$.

f.r.v.r. definida por	família de antiderivadas/primitivas
x^0	
x^1	
x^2	
x^3	
x^n com $n \in \mathbb{N}_0$	
$kf(x)$	
$f(x) + g(x)$	

A partir de alguns casos particulares de potências de x, para os quais fomos pedindo as verificações correspondentes, os alunos conjeturaram que a família de antiderivadas de x^n, com $n \in N_0$, seria $(x^{n+1})/(n+1) + C$ com C constante. Para esta conjetura foi pedida uma demonstração, o que poucos alunos já tinham feito antes desta solicitação:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + C' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0 = x^n.$$

Aproveitámos para introduzir a notação de Leibniz para antiderivada com

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

mas alertando que se trata da escrita simplificada do conjunto de todas as primitivas de x^n com $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja, de

$$\int x^n \, dx = \left\{\frac{x^{n+1}}{n+1} + C : C \in R\right\}.$$

A dedução da linearidade da primitivação gerou mais dificuldades, talvez pela falta de exemplos que poderiam, como anteriormente, conduzir a uma conjetura. Após a sugestão de denotar por $F(x)$ e por $G(x)$, respetivamente, antiderivadas de f e de g, muitos dos alunos escreveram $kF(x) + C$ e $F(x) + G(x) + K$. Neste último caso, alguns escreveram $K_1 + K_2$ em vez de K, mas rapidamente se deram conta de que podiam escrever uma só constante.

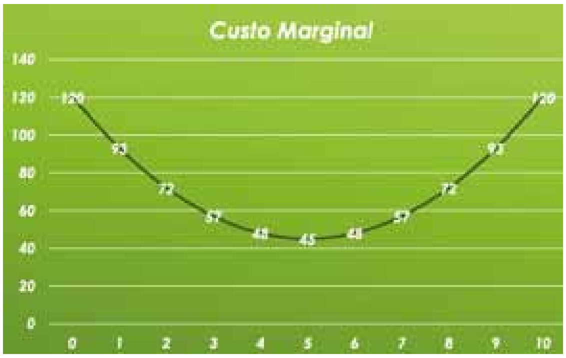

Figura 1. Representação gráfica da função
de custo marginal dada.

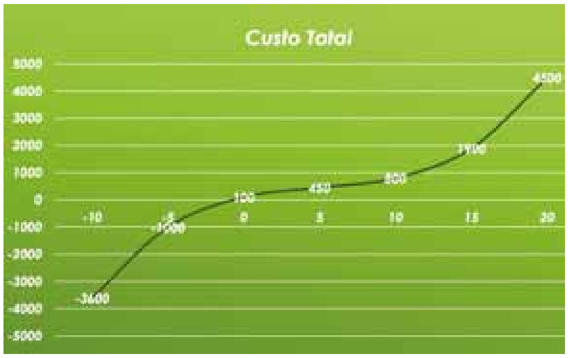

Figura 2. Representação gráfica da função
de custo total determinada.

Discutimos depois os motivos, salientando que não se tratava de mostrar igualdades entre funções, mas antes igualdades entre famílias de funções. De facto,

$$\int f(x) + g(x)\, dx$$

é a família de funções dadas por expressões da forma $H(x) + C$, com C constante e H primitiva de $f + g$, e

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

é a família de funções definidas por expressões da forma $F(x) + G(x) + K$, com K constante e F, G primitivas, respetivamente, de f, g.

Como H e $F + G$ são funções diferenciáveis num intervalo com $H' = f + g = F' + G' = (F + G)'$, então H e $F + G$ diferem por uma constante. Portanto,

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Considerações análogas conduziram a $kF' = (kF)'$, onde $k \in \mathbb{R}$, pelo que

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$$

De seguida, voltámos à proposta de encontrar a função de custo total pretendida. Todos os alunos, a pares, chegaram à expressão analítica da família de antiderivadas, $q^3 - 15q^2 + 120q + C$, mas só dois escreveram a resolução formal

$$\begin{aligned}\int 3q^2 - 30q + 120\, dq &= 3 \int q^2\, dq - 30 \int q\, dq + 120 \int 1\, dq \\ &= 3 \times \frac{q^3}{3} - 30 \times \frac{q^2}{2} + 120q + C.\end{aligned}$$

Os outros trataram a tarefa com tentativas e depois verificaram com a derivada. Alguns tiveram dúvidas quanto à constante, mas, quando lhes perguntámos sobre o que dizia o enunciado, recordaram o significado de custo fixo e chegaram à resposta $q^3 - 15q^2 + 120q + 100$ com $CT(0) = 100$.

Depois exibimos o gráfico da função CT' dada e pedimos o ponto ótimo de produção, isto é, o ponto em que a produção desta empresa apresenta o menor custo marginal. Por observação gráfica, os alunos indicaram(5, 45) e discutimos a interpretação destas coordenadas. Referimos que, analiticamente, o mesmo pode ser obtido resolvendo um problema de otimização livre de CT', em que 5 e 45 são, respetivamente, minimizante e mínimo absoluto de CT'.

A representação gráfica da função CT determinada permitiu visualizar a coincidência da abcissa do ponto de inflexão desta com a abcissa do ponto ótimo de produção, este identificado com o gráfico de CT'. Aproveitámos ainda CT para chamar a atenção dos alunos para a eventual diferença entre o domínio de uma função real de variável real e o subconjunto deste com os elementos apropriados a um certo contexto.

Uma sugestão que nos parece interessante, e que certamente colocaremos em prática na próxima edição da AJC, consiste em pedir aos alunos que determinem o custo exato da quinta unidade do produto. Pela definição dos economistas, tem-se

$$\begin{aligned}CM_g(5) &= \frac{CT(5) - CT(4)}{5 - 4} \\ &= \frac{CT(4+1) - CT(4)}{(4+1) - 4} = 46 \text{ u.m.}\end{aligned}$$

e, pela definição formal, vem

$$\begin{aligned}CM_g(5) \approx CT'(4) &= \lim_{\Delta q \to 0} \frac{CT(4 + \Delta q) - CT(4)}{\Delta q} \\ &= 3 \times 4^2 - 30 \times 4 + 120 = 48.\end{aligned}$$

Como não houve tempo para colocar a questão conceptual 2 (QC2) subsequente, adaptada de uma *good question* em [9], bem como realizar o(s) evento(s) de votação correspondente(s), propusemos aos alunos que enviassem as suas respostas acompanhadas de resolução fundamentada por correio eletrónico. Nas duas respostas recebidas, os alunos indicaram, fundamentadamente, a opção correta (A) e mostraram a compreensão da noção de antiderivada.

> **QC2** – Verdadeiro ou falso?
> Se f e g são duas funções reais de variável real tais que $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$, então $f(x) = g(x)$.
>
> (A) Verdadeiro
> (B) Falso

Como seriam as respostas dos seus alunos em cada questão conceptual QCi? E qual seria a percentagem de respostas corretas c_{QCi} na primeira votação dos seus alunos na QCi? Se decidir implementá-las com aprendizagem pelos pares, então ficaremos a torcer para que a condição $35\% \leq c_{\mathrm{QCi}} \leq 70\%$ seja satisfeita. Neste caso, fazemos votos de uma boa discussão!

REFERÊNCIAS

[1] Beites, P. D., Romano, A. (2014) "Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!", *Educação e Matemática*, (129), 13-16.

[2] Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., Timóteo, M. C. (2014) *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*, Ministério da Educação e Ciência.

[3] Fiolhais, C., Pessoa, C. (2003) Entrevista com Eric Mazur: "Ensinar é apenas ajudar a aprender", *Gazeta de Física*, 26 (1), 18-22.

[4] Krugman, P., Wells, R. (2013) *Microeconomics*, Worth.

[5] Maher, C. A., Powell, A. B., Uptegrove, E. B. (2010) *Combinatorics and reasoning*, Springer.

[6] Mazur, E. (2014) *Peer Instruction for active learning*, *https://www.youtube.com/watch?v=Z9orbxoRofI*

[7] Pires, C. (2001) *Cálculo para Economistas*, McGraw-Hill.

[8] Stewart, J. (2006) *Cálculo*, Thomson.

[9] Terrell, M. (s. d.) *Webpage of Maria Terrell*, *http://www.math.cornell.edu/~maria*

Os autores Beites e Serôdio agradecem o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2014 do CMA-UBI.

SOBRE OS AUTORES

Patrícia Damas Beites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses prendem-se com tópicos de Álgebra e de Didática da Matemática.

Fernando J. Lobo Marques é licenciado e doutorando em Gestão pela Universidade da Beira Interior. Docente de Gestão, nas áreas da Fiscalidade, Contabilidade e Matemática Financeira, sempre manteve um gosto especial pela Matemática, em particular pela Álgebra.

Rogério Serôdio é licenciado em Física pela Universidade de Lisboa e é mestre e doutor em Matemática pela Universidade da Beira Interior. Desde 2006 é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses prendem-se com tópicos de Álgebra, de Combinatória e de Educação Matemática.