EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ÉPOCA DE JULHO — ANO DE 1941

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

PONTO N.º 5

737 — Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, forme outra equação cujas raízes sejam iguais às da primeira, adicionadas do número m. R: *Seja* $Ax^2+Bx+C=0$ *a equação pedida e* α *e* β *as raízes da primeira. Será* $-\frac{B}{A}=\alpha+m+\beta+m=-\frac{b}{a}+2m=-\frac{b-2am}{a}$ *e* $\frac{C}{A}=(\alpha+m)(\beta+m)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)m+m^2=\frac{c}{a}-\frac{bm}{a}+m^2=\frac{c-bm+am^2}{a}$. *A equação pedida será pois:* $ax^2+(b-2am)x+am^2-bm+c=0$.

J. P.

738 — Defina arranjos e permutações e escreva as fórmulas que servem para o cálculo do número de grupos distintos dessas duas categorias. R: *Chamam-se arranjos aos agrupamentos de objectos que se distinguem uns dos outros quer pela ordem quer pela natureza dos objectos. (Diremos que dois objectos são da mesma natureza quando forem iguais). Permutações são agrupamentos que se distinguem simplesmente pela ordem dos objectos. As fórmulas pedidas são para o número de arranjos de* n *objectos tomados* p *a* p ${}^{n}A_{p}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ *e para o número de permutações* $P_n=n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$.

J. P.

739 — Determine os valores reais de x que verificam a expressão: $\frac{7x-5}{8x-3}>4$. R: *A desigualdade proposta é equivalente às seguintes* $\frac{7x-5}{8x-3}-4>0$; $\frac{-25x+7}{8x-3}>0$; $(-25x+7)(8x-3)>0$; $-200(x-7/25)(x-3/8)>0$ *donde* $7/25<x<3/8$.

J. P.

740 — Calcule, por logaritmos, a área do triângulo isósceles cuja base mede 21,321m, medindo $53°27'32''$ o ângulo que se opõe à base. R: *Se fôrem* b, h *e* B *a base, a altura e o ângulo oposto à base será* $A=\frac{1}{2}bh=\frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$, *e aplicando logaritmos* $\log A=2\log 21{,}321+\operatorname{colg}4+\log\operatorname{cotg}26°43'46''=2\times 1{,}32881+\bar{1}{,}39794+0{,}29792=2{,}35348$ *donde* $A=225{,}67\,m^2$.

J. P.

741 — Verifique a identidade: $\sec 2a=\frac{\operatorname{cotg}^2 a+1}{\operatorname{cotg}^2 a-1}$.

R: $\sec 2a=\frac{1}{\cos 2a}=\frac{\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a}{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}=\frac{\operatorname{cotg}^2 a+1}{\operatorname{cotg}^2 a-1}$.

J. P.

742 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $\operatorname{cotg}390°$ e $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$. R: $\operatorname{cotg}390°=\cot 30°=\frac{\cos 30°}{\operatorname{sen}30°}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$; $\cos(-9\pi/4)=\cos(9\pi/4)=\cos(2\pi+\pi/4)=\cos\pi/4=\sqrt{2}/2$.

J. P.

743 — Sôbre os lados AB e BC de um triângulo ABC constroem-se para o exterior os dois triângulos equiláteros ABC' e BCA'. Demonstre que os triângulos ABA' e CBC' são iguais e que portanto é $AA'=CC'$ *. R: *Os triângulos* ABA' *e* CBC' *são iguais porque têm 2 lados iguais e o ângulo compreendido. De facto o lado* AB *considerado como pertencendo ao 1.º triângulo é igual ao lado* C'B *do 2.º (são lados do mesmo triângulo equilátero); o lado* BA' *do 1.º é igual ao lado* BC *do 2.º (razão idêntica). O ângulo em* B *no triângulo* ABA' *é igual ao ângulo* B *do triângulo* ABC *mais* 60°, *o mesmo acontecendo ao ângulo em* B *pertencente ao triângulo* CBC'; *portanto será* $AA'=CC'$.

J. P.

744 — Defina menor múltiplo comum de 3 números e indique os métodos que conhece para o calcular. R: *Menor múltiplo comum de 3, ou mais números, é o menor número que é divisível por todos êles. Existem dois métodos para determinar o m. m. c.; o método dos factores primos e o de Euclides. Pelo primeiro o m. m. c. é o produto dos factores primos comuns a todos os números e dos não comuns, cada um tomado com o maior expoente. Pelo segundo acha-se o m. m. c. entre dois dêles e em seguida o m. m. c. entre o m. m. c. achado e o outro número; é êste o m. m. c. dos 3 números.*

J. P.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

PONTO N.º 4

745 — Resolva a inequação $\frac{x^2+6x-16}{2x^2-3x-35}<0$. R: *As raízes do trinómio numerador,* N, *são* -7 *e* $+2$ *e as do denominador,* D, *são* $-\frac{7}{2}$ *e* $+5$. *As soluções da inequação proposta são os valores que satisfizerem a qualquer dos sistemas* $N>0$ *e* $D\leqq 0$ *ou* $N<0$ *e* $D>0$. *De modo que os valores pedidos são* $2<x<0$ *e* $-8<x<-\frac{7}{2}$.

J. P.

746 — Diga o que sabe sôbre as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ quando se anulam separadamen e os coeficientes a, b e c, e, ainda, quando se anulam simultâneamente dois dêles, associados de tôdas as maneiras possíveis. R: $c=0$ *uma raiz nula e outra* $-\frac{b}{a}$; $b=0$ *duas raízes simétricas* $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$; $a=0$ *uma raiz* ∞ *e outra* $-\frac{c}{b}$; $b=0$ *e* $c=0$ *duas raízes nulas;* $a=0$ *e* $b=0$ *duas raízes infinitas;* $a=0$ *e* $c=0$ *uma raiz infinita e outra nula.*

J. P.

747 — Escreva na forma de potência a expressão $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$. R: $20^{\frac{1}{6}}$.

J. P.

748 — Calcule por logaritmos, a diferença dos comprimentos das bases de um trapézio rectângulo cuja altura mede 17,48 m e em que um dos ângulos internos mede $148°29'45''$. R: *Se um dos ângulos mede* $148°29'45''$ *o outro mede* $31°30'15''$ *e a diferença pedida é dada por* $d=17{,}48\,m\operatorname{cotg}31°30'15''$ *ou* $\log d=\log 17{,}48+\log\operatorname{cotg}31°30'15''=1{,}24254+0{,}21262=1{,}45516$ *e* $d=28{,}51$ m.

J. P.

749 — Escreva a expressão geral dos ângulos que verificam a igualdade $\operatorname{cosec}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$. R: $x+\frac{\pi}{6}=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}$ *ou seja* $x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$.

J. P.

750 — Desenhe um triângulo rectângulo e construa sôbre cada um dos seus lados um triângulo equilátero. Prove que a área do

* Aconselha-se o leitor a executar sempre a construção indicada.

triângulo construído sôbre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sôbre os catetos. R: *Sejam* a, b, e c *respectivamente a hipotenusa e os catetos do triângulo rectângulo e* h_1, h_2 *e* h_3 *as alturas dos triângulos equiláteros que têm por base* a, b *e* c. *Como os triângulos equiláteros são semelhantes será* $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}$ *e* $\frac{h_1}{h_3}=\frac{a}{c}$ *donde* $bh_1=ah_2$ *e* $ch_1=ah_3$. *Provar o teorema proposto equivale a provar que* $bh_2+ch_3=ah_1$, *mas tendo em conta as relações anteriores tem-se sucessivamente* $b\cdot\frac{bh_1}{a}+c\,\frac{ch_1}{a}=ah_1$ *e* $b^2+c^2=a^2$ *que por traduzir o teorema de Pitágoras demonstra o enunciado.*

J. P.

751 — Defina paralelogramo e indique os casos particulares em que as suas diagonais se dirigem segundo as bissectrizes dos ângulos internos. R. *Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois. Os casos particulares pedidos são aquêles em que os quatro lados são iguais, isto é, o quadrado ou o losango, porque dividindo a diagonal os ângulos internos ao meio fica o paralelogramo dividido em 2 triângulos iguais, por cada diagonal, triângulos que tendo 2 ângulos iguais são isósceles.*

J. P.

752 — Defina lugar geométrico e indique qual o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três planos que se cortam dois a dois segundo rectas paralelas distintas. R: *Chama-se lugar geométrico ao conjunto de todos os pontos do espaço, que gozam da mesma propriedade que lhes é exclusiva. O lugar geométrico pedido é constituído por 4 rectas definidas pela intersepção dos planos bissectores dos diedros formados pelos planos dados.*

J. P.

753 — Defina múltiplo de um número e demonstre que o quadrado de todo o número não divisível por 5 é um múltiplo de 5 aumentado ou diminuído de uma unidade. R: *Chama-se múltiplo de um número* a *a todo o número da forma* na *em que* n *é um inteiro. Um número não múltiplo de 5 é duma das seguintes formas:* $5n\pm1$ *e* $5n\pm2$. *Se o número é* $5n\pm1$ *o seu quadrado será* $5^2n^2+1\pm\pm2.5n=\dot{5}+1$; *se é do forma* $5n\pm2$ *o seu quadrado é* $5n^2+4\pm\pm2.2.5n=\dot{5}+4=\dot{5}-1$.

J. P.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

PONTO N.º 1

754 — Resolva a equação $2(x-1)^2=(x+5):3$ calculando o valor numérico das raízes até à terceira casa decimal. R: *A equação dada é equivalente a* $6x^2-13x+1=0$ *que se obtém da proposta desenvolvendo o primeiro membro, desembaraçando do denominador e simplificando. As raízes são* $x_1=2{,}086$ *e* $x_2=0{,}079$.

J. P.

755 — Partindo da expressão que dá o número de combinações de n objectos p a p deduza o número de diagonais que se podem tirar num polígono de n lados. R: *Se considerarmos os* n *vértices do polígono o número de rectas distintas que podem traçar-se unindo 2 a 2 êsses vértices é dado pela expressão* $\binom{n}{2}$ *mas como* n *dessas rectas são lados do polígono o número de diagonais é* $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=n(n-2):2$.

J. P.

756 — Calcule o valor, reduzido à dízima, da expressão $y=x^{-\frac{5}{2}}-1$ para $x=0{,}3274$. R: *Calculando o valor de* $x^{\frac{5}{2}}$ *por meio de logaritmos vem* $\log x^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\log x=\frac{5}{2}\times\bar{1}{,}51508=\bar{2}{,}78770$ *e* $x^{\frac{5}{2}}=0{,}061334$. *Logo* $y=\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}-1=\frac{1-x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}=15{,}304$.

J. P.

757 — A hipotenusa dum triângulo rectângulo é igual a 203,25 metros e a razão dos ângulos adjacentes igual a 1,25. Calcular a área do triângulo. R: *Se forem* $\hat{B}$ *e* $\hat{C}$ *os ângulos agudos será* $\frac{B}{C}=1{,}25=125/100=5/4$ *e como* $B+C=90^\circ$ *será* $B=50^\circ$ *e* $C=40^\circ$. *A área é dada pela expressão* $A=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}C\cos C=\frac{a^2}{4}\operatorname{sen}2C$, *se fôr* a *a hipotenusa; donde* $A=\frac{203{,}25^2}{4}\cdot\operatorname{sen}80^\circ=10170{,}66\,m^2$.

J. P.

758 — Escrever as fórmulas do seno, coseno e tangente da soma de dois ângulos. Fazer os ângulos iguais e escrever as fórmulas resultantes simplificadas.

759 — Demonstrar que, no plano, se um ângulo se desloca sendo cada lado obrigado a passar por um ponto fixo, qualquer recta invariàvelmente ligada ao ângulo e passando pelo vértice passa constantemente por um terceiro ponto fixo. R: *Quando um ângulo se desloca pelo modo descrito no enunciado o seu vértice descreve um arco de circunferência (pois o lugar geométrico dos pontos dos quais se vê um segmento sob um ângulo dado é constituído por dois arcos de circunferência simétricos, de que o segmento é a corda); se a recta passa pelo vértice invariàvelmente ligada ao ângulo, necessàriamente essa recta passará por um ponto fixo que pertence ao arco de circunferência descrito pelo vértice.*

J. P.

760 — Que métodos conhece para determinar o menor múltiplo comum? Aplique-os aos números 719 e 620. R: *O método de Euclides e o método da decomposição em factores primos. Como* 719 *é primo o m. m. c. é o produto dos dois números* $719\times260=186940$.

J. P.

Instituto Superior de Agronomia

PONTO N.º 2

761 — Resolva a inequação $\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)}<-1$.

R: $\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)}+1<0$. *Efectuando e simplificando:* $\frac{3x-2+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}<0$, $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}<0$. *Para que a fracção seja negativa é necessário e suficiente que o seu denominador seja negativo, porquanto o numerador é positivo por se tratar dum quadrado perfeito. Dêste modo a inequação anterior é equivalente à inequação* $(x-1)(x-2)<0$. *Como as raízes do 1.º membro são, como é evidente,* 1 *e* 2 *conclue-se que a desigualdade é satisfeita para valores de* x *do intervalo restricto* $(1,2)$, *isto é,* $1<x<2$.

J. C.

762 — *a)* Quantos produtos diferentes se podem formar com os números 2, 5, 7, 9 e 11 de modo que em cada produto figurem três daqueles factores? R: *Como, pela natureza do enunciado, os produtos deverão ser diferentes, conclue-se que total ou parcialmente deverão ser diferentes os factores que os compõem. O número de tais produtos é por isso igual ao número de combinações de 5 objectos tomados 3 a 3:* $C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3!}=10$.

J. C.

b) A que condições devem satisfazer os coeficientes reais a, b e c para que a equação $ax^4+bx^2+c=0$ admita duas raízes nulas e duas raízes imaginárias? Justifique. R: *Para que a equação admita duas raízes nulas e duas imaginárias, deverá a equação resolvente admitir uma raíz nula e outra negativa; donde resulta que o produto das raízes é nulo e a sua soma é negativa o que equivale a afirmar que* $\frac{c}{a}=0 \quad -\frac{b}{a}<0$ *ou* $\begin{cases} \frac{c}{a}=0 \\ \frac{b}{a}>0 . \end{cases}$

J. C.

763 — Um dos catetos dum triângulo rectângulo mede 1256 metros e a altura referente à hipotenusa mede 1044 metros. Calcule o ângulo agudo adjacente ao cateto dado, do referido triângulo. R: *Designando, respectivamente, por* c, h e B *o cateto, a altura e o ângulo referido tem-se:* $h=c \operatorname{tg} B$ *donde* $\operatorname{tg} B=\frac{h}{c}$.

$\log \operatorname{tg} B=\log h+\operatorname{colg} c=3{,}01870+\bar{4}{,}90101=\bar{1}{,}91971$; $B=39^\circ\, 44'$.

J. C.

764 — *a)* Verifique a seguinte identidade: $\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x=2-\cos^2 x$. R: $\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x=$

$=\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{sen}^2 x+1=1-\cos^2 x+1=2-\cos^2 x$.

J. C.

b) Em que quadrantes são simultâneamente crescentes as funções tangente e cosecante? Justifique. R: *A função tangente é crescente em todos os quadrantes. A cosecante é crescente nos quadrantes em que é decrescente o seno, isto é, no 2.º e 3.º quadrantes. De modo que as duas funções são crescentes simultâneamente no 2.º e 3.º quadrantes.*

J. C.

765 — Considere no paralelogramo $[ABCD]$ a diagonal AC. Conduza pelos vértices B e D perpendiculares àquela diagonal e designe por M e P respectivamente, os pontos de intercepção dessas perpendiculares com a referida diagonal. Demonstre que os segmentos de recta $\overline{BM}$ e $\overline{DP}$ são iguais. R: *Com efeito os triângulos rectângulos* [ABM] *e* [PDC] *são iguais por terem a hipotenusa e um ângulo agudo iguais cada um a cada um. E como em triângulos iguais a ângulos iguais opõem se lados iguais, conclue-se que* $\overline{BM}=\overline{PC}$.

J. C.

766 — Uma esfera de raio R foi seccionada por um plano que dista do centro da esfera $3R/5$. Sabendo que o perímetro da secção obtida e a área da superfície da esfera são expressos pelo mesmo número, calcule R. R: *Designando por* r *o raio da secção e atendendo às condições do enunciado tem-se* (1) $2\pi r=4\pi R^2$. *Por outro lado, o teorema de Pitágoras permite escrever* $r=\sqrt{R^2-\frac{9}{25}R^2}=$ $=\frac{4}{5}R$, *donde, por substituïção em* (1) $2\pi \cdot \frac{4}{5}R=4\pi R^2$ *ou* $R=\frac{2}{5}$.

J. C.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

PONTO N.º 2

767 — *a)* Defina lugar geométrico e dê exemplos de lugares geométricos no plano e no espaço. ¿Uma superfície cilíndrica pode ser considerada como um lugar geométrico? Justifique a resposta. *b)* Determine o lugar geométrico dos vértices dos triângulos que têm a mesma base e a mesma área. R: *b) Os triângulos em questão têm a mesma altura, logo o lugar geométrico é o conjunto das 2 rectas paralelas à base comum equidistando desta a altura, isto no caso do plano. Supondo que se trata dum problema no espaço o lugar geométrico é a superfície cilíndrica de revolução cujo raio da secção recta tem por medida a altura e cujo eixo é a recta a que a base pertence.*

M. Z.

768 — Resolver a equação $(x+\sqrt{x}).(x-\sqrt{x})=(a+\sqrt{a}).(a-\sqrt{a})$. Determinar a de modo que o produto das raízes seja igual a -1. R: *Tem-se* $(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})=(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})$ *ou* $x^2-x-a^2+a=0$, *donde* $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^2-4a}}{2}=\frac{1\pm(1-2a)}{2}$. *As raízes são pois* $x_1=1-a$ e $x_2=a$. *O valor de* a *satisfazendo à condição pedida é dado por* $-a^2+a=-1$ *ou* $a^2-a-1=0$ *donde* $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

M. Z.

769 — Calcular o valor de x dado pela expressão $x^2=\frac{a\sqrt{b}}{cd^2}$ onde $a=1/4$, $b=\operatorname{sen} 17^\circ\, 28'$, $c=0{,}004$, $d=(0{,}03)^{-2}$.

R: $x=\pm\frac{a^{1/2}\, b^{1/4}}{c^{1/2}\, d}=\pm\frac{\operatorname{sen}^{1/4} 17^\circ 28' \; (0{,}03)^2}{4^{1/2}\, .\, (0{,}004)^{1/2}}$

$$\begin{array}{ll} 1/4 \log \operatorname{sen} 17^\circ\, 28' & =\bar{1}{,}8693349 \\ 2 \log 0{,}03 & =\bar{4}{,}9542426 \\ 1/2 \operatorname{colg} 4 & =\bar{1}{,}6989700 \\ 1/2 \operatorname{colg} 0{,}004 & =1.1989700 \\ \hline \log |x| & =\bar{3}{,}7215175 \end{array}$$

$|x|=0{,}00526644$, *donde* $x=\pm 0{,}00526644$.

M. Z.

770 — É dado um círculo de raio de r e, inscrito nêle, um triângulo isósceles tal que a soma dos ângulos adjacentes à base é três vezes o ângulo no vértice. Determinar os lados e ângulos dêsse triângulo. R: *Seja* α *a medida comum dos ângulos adjacentes à base* b *e* β *a do ângulo oposto. Tem-se* $2\alpha=3\beta$ *e* $2\alpha+\beta=180^\circ$, *donde* $\beta=45^\circ$ *e* $\alpha=67^\circ\, 30'$. *O ângulo ao centro correspondente à corda* b *é evidentemente* $2\beta=90^\circ$, *e, portanto,* b *é o lado do quadrado inscrito ou* $b=r\sqrt{2}/2$. *Designando por* l *a medida comum dos outros* 2 *lados do triângulo isósceles tem-se*

$$l=r\frac{\sqrt{2}}{2} . \sec 67^\circ\, 30'=\frac{r}{\sqrt{2} . \cos 67^\circ\, 30'} .$$

M. Z.

771 — Resolver um triângulo rectângulo conhecendo a hipotenusa a e a área s. Aplicação numérica: $s=16{,}8$ metros quadrados, $a=7$ metros. R: *Tem-se* $bc=2s$ *e* $b^2+c^2=a^2$ *donde* $(b+c)^2=a^2+4s$ *e* $b+c=+\sqrt{a^2+4s}$.

b *e* c *são pois as raízes da equação:* $X^2-\sqrt{a^2+4s}\, X+2s=0$, *donde* $X=\frac{\sqrt{a^2+4s}\pm\sqrt{a^2+4s-8s}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+4s}\pm\sqrt{a^2-4s}}{2}$. *A condição de possibilidade é traduzida por* $a^2-4s\geq 0$. *No caso presente é* $49-67{,}2<0$ *e portanto os dados não são admissíveis.*

M. Z.

772 — Determinar o menor valor inteiro de n para a qual a fracção $\frac{1.2.3\cdots n}{2.4.6\cdots 2n}$ é inferior a $\frac{1}{10^4}$. R: *Tem-se* $\frac{1.2.3\cdots n}{2.4.6\cdots 2n}=\frac{1}{2^n}$ *e* $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10^4}$ *donde* $2^n>10^4$, *ou* $n\log 2>4$, *e finalmente* $n>\frac{4}{\log 2}=\frac{4}{0{,}30103\cdots}=13{,}2\cdots$. *O valor pedido é pois* $n=14$.

M. Z.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais o primeiro — Tempo de duração da prova: 2 horas.

Instituto Superior Técnico

PONTO N.º 3

773 — Uma sala rectangular com 45 metros quadrados de superfície encontra-se pavimentada com ladrilhos de duas qualidades. Os primeiros cobrem uma superfície de 34,44 metros quadrados e os segundos, dispostos em quatro filas, formam uma cercadura rectangular dos primeiros em tôda a volta da sala. Sabendo que os ladrilhos da cercadura são quadrados de 1 decímetro de lado, calcular as dimensões da sala. *R: Sejam* x *e* y *as medidas, em decímetros, das dimensões do pavimento da sala. O rectângulo cuja área é* 3444 dcm^2, *tem por lados* $x-8$ *e* $y-8$ *donde a primeira equação* $(x-8)(y-8)=3444$, *por outro lado é* $xy=4500$. *O sistema destas duas equações é equivalente ao sistema* $xy=4500$ *e* $x+y=140$, *como se vê fàcilmente, cujas soluções são* $x=90 \text{ dcm}$ *e* $y=50 \text{ dcm}$.

J. P.

774 — Determinar as condições a que satisfazem os números a e b sendo $\log(a-b)=\log a+\log b$. *R: De* $\log(a-b)=\log a+\log b$ *vem sucessivamente* $\log(a-b)=\log(ab)$ *e* $a-b=ab$ *ou* $a=\dfrac{b}{1-b}$; *por outro lado terá que ser* $a-b>0$, $a>0$ *e* $b>0$.

J. P.

775 — Determinar os valores de x que satisfazem à equação $\operatorname{arc\,sen} x\sqrt{3}=\operatorname{arc\,sen} 2x-\operatorname{arc\,sen} x$. R: *Façamos* $\operatorname{arc\,sen} 2x=\alpha$ *e* $\operatorname{arc\,sen} x=\beta$ *ou seja* $\operatorname{sen}\alpha=2x$ *e* $\operatorname{sen}\beta=x$ *será* $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-4x^2}$ *e* $\cos\beta=\pm\sqrt{1-x^2}$. *Da equação proposta tira-se então* $\operatorname{arc\,sen} x\sqrt{3}=\alpha-\beta$ *ou* $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=x\sqrt{3}$ *e desenvolvendo esta expressão* $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=x\sqrt{3}$ *e* $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=x\sqrt{3}+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ *ou* $2x\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{3}+x\sqrt{1-4x^2}$ *equação que admite a solução* $x=0$; *as outras soluções serão as da equação* $2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}+\sqrt{1-4x^2}$ *que por sua vez são tôdas ou algumas das da equação que se obtém elevando ao quadrado ambos os membros daquela, isto é, de* $4(1-x^2)=3+1-4x^2+2\sqrt{3(1-4x^2)}$ *ou* $2\sqrt{3(1-4x^2)}=0$ *cujas soluções são as da equação* $1-4x^2=0$ *ou seja* $x=\pm 1/2$. *Tôdas as soluções satisfazem ao problema.*

J. P.

776 — Dada uma circunferência de raio R achar a distância do centro a que devem ser tiradas as tangentes à mesma circunferência para que a corda determinada pelos seus pontos de contacto tenha um dado comprimento a. Valor dessa distância para $a=R$. R: *Seja* x *a distância pedida, e sejam* O, T, T' *e* S *respectivamente o centro da circunferência, os pontos de contacto das tangentes e o ponto donde são tiradas as tangentes. Será* $\overline{OS}=x$ *e* $\overline{OT}=R$; *por outro lado o triângulo* OST *é rectângulo e* $\overline{OS}$ *é a sua hipotenusa. A corda* $\overline{TT'}=a$ *é perpendicular a* $\overline{OS}$, *e a altura do triângulo* OST, *relativa à hipotenusa tem por medida* $\dfrac{a}{2}$. *Se designarmos por* y *a distância da corda* TT' *ao centro* O, *pela aplicação da teorema de Pitágoras temos:* $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=R^2$; $R^2=xy$ *visto* y *ser a projecção de* R *sôbre* x. *A resolução dêste sistema dá o valor* $x=\dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2-a^2}}$ *que para* $a=R$ *toma a forma* $x=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

J. P.

777 — Numa pirâmide tetragonal regular a aresta da base mede 10 centímetros e as arestas laterais formam com a base ângulos de 45 graus. Calcular a área da secção feita na pirâmide por um plano paralelo à altura e a uma das arestas laterais e distando 2 centímetros da altura. R: *O plano que secciona a pirâmide é paralelo a um plano diagonal* (¹) *da pirâmide e determina nela uma figura homotética da secção produzida pelo plano diagonal que como fàcilmente se vê, é um triângulo rectângulo isósceles, cuja altura relativa à hipotenusa (que é a altura da pirâmide) é portanto igual a metade da hipotenusa (diagonal da base da pirâmide). A metade desta diagonal tem por medida, como é óbvio,* $\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$ *visto a base ser um quadrado. A razão de homotetia entre as duas figuras é* $\dfrac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2}$ *e portanto a altura do triângulo pedido, igual a metade da base, é* $5\sqrt{2}-2$, *donde a área* $A=(5\sqrt{2}-2)^2 \cdot \text{cm}^2$.

J. P.

778 — Calcular a área da lúnula limitada por dois planos diametrais duma esfera sabendo que o triângulo plano formado por um dos extremos do diâmetro comum e pelos pontos de intersecção dos referidos planos com o círculo máximo perpendicular tem um lado igual a 6 centímetros e o outro igual a 12 centímetros. R: *Se considerarmos o triângulo plano cujos vértices são um extremo do diâmetro comum, o centro da esfera e um dos pontos de intersecção dos planos com o círculo máximo, (triângulo rectângulo cujos catetos são raios da esfera) a hipotenusa dêste triângulo é um dos lados de 6 ou 12 centímetros; é fácil ver que não pode medir 6 cm pois o outro, que é uma corda, seria maior que o diâmetro da esfera. Então o raio da esfera é dado por* $R^2+R^2=12^2$ *ou seja* $R=6\sqrt{2}$. *O ângulo diedro formado pelos dois planos é tal que o seu rectilíneo* $\alpha=2\operatorname{arc\,sen}\dfrac{6}{2.6\sqrt{2}}$ *o que dá o valor* $\alpha/2=20^\circ{,}704$. *A área da lúnula será então* $A=\dfrac{20{,}704}{360}\cdot 2\cdot 4\cdot \pi(6\sqrt{2})^2=26 \text{ cm}^2$.

J. P.

(¹) Por comodidade chamaremos plano diagonal ao definido pelo vértice da pirâmide e pela diagonal da base.

ALGEBRA SUPERIOR

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, Fev. de 1941

779 — Resolver a equação $1-\alpha x+\alpha^2x^2-\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}x^{n-1}=0$ onde α é uma raiz de índice n da unidade. A equação tem raízes reais? Quais e quando? R: *O 1.º membro da equação proposta é a soma dos* n *primeiros termos duma progressão geométrica de razão* $-\alpha x$. *Escrever-se-á, portanto,* $\dfrac{(-1)^n\alpha^n x^n-1}{\alpha x+1}=0$ *ou* $\dfrac{(-1)^n x^n-1}{\alpha x+1}=0$ *por ser* α *uma raiz de índice* n *da unidade. Se* n *é par, as raízes da equação dada são as raízes da equação* $x^n-1=0 \longrightarrow x=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n}$ $k=0,1,\cdots(n-1)$ *com excepção da raiz* $-\dfrac{1}{\alpha}$. *Se* n *é ímpar, as raízes da equação dada são as raízes da equação* $x^n+1=0 \longrightarrow x=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n}+i\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi}{n}$ $k=0,1,\cdots(n-1)$ *com a excepção da raiz* $-\dfrac{1}{\alpha}$. *Note-se que, sendo* α *uma raiz de índice* n *da unidade e* n *par,* $-\alpha^{n-1}=-\dfrac{1}{\alpha}$ *é ainda uma raiz de índice* n *da unidade. Se* n *é ímpar,* $-\alpha^{n-1}$ *é uma raiz de índice* n *da unidade negativa. Raízes reais. Se* n *é par, haverá duas raízes reais* ± 1 *ou uma só* ± 1, *conforme* $\alpha\neq\pm 1$ *ou* $\alpha=\mp 1$. *Se* n *é impar haverá uma raiz real* -1 *se* $\alpha\neq\pm 1$.

780 — Determine o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão das suas distâncias a dois pontos fixos do plano seja $\frac{1}{n}$. Discussão. Traçado do lugar para $n=1$ e $n=2$. R: *Sejam* $P_1(-a, 0)$ *e* $P_2(a, 0)$ *os dois pontos fixos (eixos cartezianos rectangulares). Seja* $M(x, y)$ *um ponto qualquer do plano, êle pertencerá ao lugar se* $\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}=\frac{1}{n}$ *ou* $\frac{x^2+y^2+2ax+a^2}{x^2+y^2-2ax+a^2}=\frac{1}{n^2}$, $(n^2-1)x^2+(n^2-1)y^2+2a(n^2+1)x+(n^2-1)a^2=0$. *Se* $n \neq \pm 1$, *o lugar é a circunferência de centro* $C\left(-a\frac{n^2+1}{n^2-1}, 0\right)$ *e raio* $r=\frac{2an}{n^2-1}$. *Se* $n \to +\infty$, $r \to +0$ *e a abscissa do centro* $\alpha \to -a$, *a lugar reduz-se ao ponto* P_1. *Se* $n=1$, *a equação escreve-se* $x=0$ *e o lugar coïncide com o eixo* Oy.

Para $n=2$ $x^2+y^2+\frac{10}{3}ax+a^2=0$.

Nota — *Supoz-se* $n>0$.

Outra resolução: *Sejam* A *e* B *os dois pontos fixos e sejam* M *e* N *os pontos que dividem o segmento* $\overline{AB}$ *em dois segmentos tais que a razão das suas medidas é* $\frac{1}{n}$ (M *e* N *são conjugados harmónicos em relação a* A *e* B). *É evidente que os dois pontos* M *e* N *pertencem ao lugar.*

Seja P *um ponto do lugar. Então* $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ *e, portanto* $\overline{PM}$ *é a bissectriz do ângulo* $A\hat{P}B$ *e* $\overline{PN}$ *a do ângulo* $A\widehat{P}B'$. *Conseqüentemente, o ângulo* $M\hat{P}N$ *é recto. Reciprocamente, se o ponto* P *é tal que o ângulo* $M\widehat{P}N$ *seja recto, então a razão das suas distâncias a* A *e a* B *é igual a* $\frac{1}{n}$. *Logo o lugar geométrico é a circunferência de diâmetro* $\overline{MN}$. *Se* $n=1$, *como imediatamente se reconhece, o lugar geométrico é a mediatriz do segmento* $\overline{AB}$.

As soluções dos exercícios 779 e 780 são devidas ao Sr. Dr. Augusto Sá da Costa.

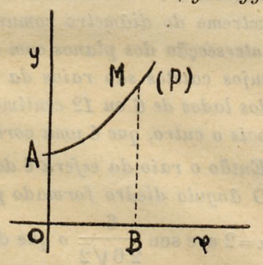
CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Junho de 1941

781 — Determinar o plano osculador da linha
$$\begin{cases} z^y+y^z+x^y-x=2 \\ 4\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{y}-4z-2x=\pi-6, \end{cases}$$ no ponto $(1, 1, 1)$.

782 — Integrar a equação $x^2y''-xy'+2y=\frac{x}{\sqrt{1+\mathrm{sen}^2(\log x)}}$.

783 — Seja (l) a linha integral da equação $\sqrt{1+y'^2}=yy'$ que passa pelo ponto $(0, 1)$, e consideremos um ponto P cuja abcissa tenha um valor numérico igual ao da área $OAMB$ e cuja ordenada seja igual ao comprimento do arco $\overline{AM}$.



Mostrar que a tangente em P ao lugar (L) dos pontos P é paralela à tangente em M, e verificar se há ou não correspondência entre os $M.$ e $m.$ de Y e y, e entre os pontos de inflexão das 2 curvas.

I. S. C. E. F. — Exame final, 17 de Julho de 1941

784 — As equações $\begin{cases} uv+xy=1 \\ \frac{u+v}{x+y}=-1 \end{cases}$ definem x e y como funções de u e v. Calcular $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$.

785 — Calcular o integral $\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ estendido: 1.º — a todo o plano, 2.º — ao interior da parábola $y^2=2x$.

R: 1.º — *Introduzindo coordenadas polares, tem-se:* $\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^2}$. *O integral impróprio* $\int_0^{\infty} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^2}$ *é convergente, como se vê imediatamente; e, como se conhece uma primitiva* $\frac{-1}{2(\rho^2+1)}$ *da função integranda, é muito fácil de calcular; o seu valor é* $\frac{1}{2}$.

O integral pedido tem então por valor $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta=\pi$.

2.º — *A equação polar da parábola dada é* $\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta-2\rho\cos\theta=0$, *donde* $\rho=0$ *e* $\rho=\frac{2\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$. *O integral duplo, efectuando a mesma mudança de variáveis do exercício anterior pode escrever-se:*

$$I=\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{2\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^2}.$$ *Mas* $$\int_0^{\frac{2\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^2}=\frac{4\cos^2\theta}{4\cos^2\theta+\mathrm{sen}^4\theta}$$ *e, portanto, vem:* $$I=8\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{4\cos^2\theta+\mathrm{sen}^4\theta}=8\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+4t^2+4},$$ *fazendo a mudança de variável* $\mathrm{tg}\,\theta=t$; *êste integral é convergente e calcula-se pela determinação da primitiva de uma função racional.*

M. Z.

786 — Integrar a equação $x^2y'^2-2xyy'+y^2=x^4+x^2y^2$.
R: *Notemos que o primeiro membro se pode escrever* $(xy'-y)^2$. *Tem se então:* $xy'-y=\pm x(x^2+y^2)^{1/2}$. *Escrevendo-a sob forma conveniente é fácil de ver tratar-se duma equação homogénea. Fazendo a mudança de variável* $y=tx$, *vem:* $\frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}}=\pm dx$.

A equação $\frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}}=dx$ *tem por integral geral* $t=\mathrm{senh}(x+c)$ *e a equação* $\frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}}=-dx$ *o integral* $t=\mathrm{senh}(c-x)$.

O integral geral da equação proposta é então
$$[y-x\,\mathrm{sen\,h}(x+c)]\,[y-x\,\mathrm{senh}(c-x)]=0.$$

N. B. — *Vidè:* A. R. Forsyth — A treatise on differential equations — London — 6.ª ed 1933, págs. 30-31.

M.Z.

I. S. T. — Março de 1941

787 — Determimar sôbre a circunferência de intersecção do plano $y=2x$ com a esfera de raio R e de centro na origem, os máximos e mínimos da função $F=x-y-z$. (Eixos rectangulares). R: *As equações de condição são* $\varphi_1(x,y,z)\equiv 2x-y=0$ *e* $\varphi_2(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0$. *Os pontos de estacionaridade da função* F *são as soluções do sistema:*

$$\begin{cases}\varphi_1=0\\ \varphi_2=0\\ \dfrac{\partial(F,\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y,z)}=0\end{cases} \quad ou \quad \begin{cases}2x-y=0\\ x^2+y^2+z^2-R^2=0\\ x+2y-z=0\,.\end{cases}$$

M. Z.

788 — Calcular o integral $\int \frac{x^3\,dx}{(x^3-1)^2}$. R: *A função integranda é racional. Tem-se* $(x^3-1)^2=(x-1)^2(x^2+x+1)^2$. *A regra de Fubini permite escrever imediatamente* (1) $\int \frac{x^3\,dx}{(x^3-1)^2}=A\log(x-1)+B\log(x^2+x+1)+C\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}+C.^{te}$. *As constantes* A, B, C, D, E, F *são a solução do sistema de equações lineares que se obtém por identificação dos 2 membros da igualdade que resulta de* (1) *por derivação.*

M. Z.

789 — Dado o sistema $\begin{cases}x+y+z+u=0\\ x^y\log z-u^x\log y=4\end{cases}$ calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

790 — Verificar em $f(x,y,z)=\frac{\sqrt{x^3+y^3+z^3}}{\sqrt{x+y+z}}$ as propriedades fundamentais das funções homogéneas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

791 — Provar que para k, inteiro positivo, é nulo o seguinte determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2k+1)!} & \frac{1}{(2k+2)!}\\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2k)!} & \frac{1}{(2k+1)!}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2k-1)!} & \frac{1}{(2k)!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

792 — Mostrar que o determinante Δ_n é nulo para $n>2$.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n\\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & \cdots & a_3-b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

793 — Calcular o determinante de ordem n cujos elementos e_{ij} são dados por $e_{11}=e_{1j}=e_{i1}=1$ e $e_{ij}=e_{i-1,j}+e_{i,j-1}$ $(1<i,j\leq n)$.

794 — O sucessor do produto de quatro inteiros consecutivos é um quadrado.

$$(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)+1=(n^2+n-1)^2.$$

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EM NÚMEROS ANTERIORES

706 — Numa circunferência de raio R traça-se um triângulo inscrito. Dois dos lados dêste triângulo limitam segmentos circulares cujas alturas são $R/6$ e $R/8$. Calcular a área do triângulo. R: *Sejam* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *as cordas que limitam os segmentos de alturas* R/6 *e* R/8 *respectivamente. Tem-se imediatamente:* $(\overline{AB}/2)^2=R/6\,.\,(2R-R/6)=11R^2/36$ *e* $(\overline{BC}/2)^2=R/8\,(2R-R/8)=15R^2/64$, *donde* $\overline{AB}=R\sqrt{11}/3$ *e* $\overline{BC}=R\sqrt{15}/4$. *A altura* $\overline{BD}$ *do triângulo* [ABC] *de base* $\overline{AC}$ *permitirá determinar a área pedida, por intermédio do cálculo* AD *e* DC. BD *pode encontrar-se como segue: Tome-se o diâmetro de uma circunferência dada, de que uma extremidade é* B; *seja* F *o outro extremo dêsse diâmetro; os triângulos rectângulos* [BAD] *e* [BFC] *são semelhantes porque os ângulos em* A *e* F *são iguais. Então* $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{BF}$ *e, portanto,* $\overline{BD}=R\sqrt{165}/24$ *visto ser* $BF=2R$.

Tem-se pois $\overline{DC}=\sqrt{15\ {}^2/16-165R^2/24^2}=5\sqrt{15}R/24$ *e* $\overline{AD}=\sqrt{11R^2/9-165R^2/24^2}=7\sqrt{11}R/24$. *A área pedida é pois* $1/2\,(\overline{AD}+\overline{DC})\,.\,\overline{BD}=(77\sqrt{15}+75\sqrt{11})\,.\,R^2/1152$.

EMIDIO DE OLIVEIRA

332 — Demonstrar a identidade: ${}^nC_r+2\,{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-2}={}^{n+2}C_r$. R: *O primeiro membro da igualdade pode escrever-se* ${}^nC_r+2\,{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-2}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}+2\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r-2)!\,(n-r+2)!}=$

$$=\frac{n!\,(n-r+1)\,(n-r+2)+2n!\,r\,(n-r+2)+n!\,r\,(r-1)}{r!\,(n-r+2)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n^2+r^2-2nr+3n-3r+2+2nr-2r^2+4r+r^2-r)}{r!\,(n-r+2)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n^2+3n+2)}{r!\,(n-r+2)!}=\frac{n!\,(n+1)\,(n+2)}{r!\,(n-r+2)!}=\frac{(n+2)!}{r!\,(n+2-r)!}={}^{n+2}C_r \quad c.\,q.\,d.$$

J. P.

333 — Se um triângulo $B=18^\circ$ e $C=36^\circ$ então é $a\ b=R$ o raio do círculo circunscrito ao triângulo. R: *E' fácil ver que os menores arcos da circunferência circunscrita ao triângulo* ABC *que tem por cordas os lados* b, c *e* a *medem respectivamente* 36°, 72° *e* 108°. *Como se sabe qualquer corda duma circunferência é igual ao diâmetro multiplicado pelo seno da metade do menor arco que a corda subtende; por isso será* $a=2R\,\mathrm{sen}\,54^\circ$ *e* $b=2R\,\mathrm{sen}\,18^\circ$; *donde* $a-b=2R\,(\mathrm{sen}\,54^\circ-\mathrm{sen}\,18^\circ)=2R\,(0{,}809-0{,}309)=R$.

J. P.

RECTIFICAÇÕES

687 — Seja b a base e l o lado. Tem-se $\begin{cases}4l^2-b^2=4h^2\\ 2l+b=p\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}2l-b=4h^2/p\\ 2l+b=p\end{cases}$ donde $l=\frac{4h^2+p^2}{4p}$ e $b=\frac{p^2-4h^2}{2p}$. Tem de ser, evidentemente, $p>2h$.

Aplicação numérica: $h=2$, $p=8\longrightarrow l=2{,}5$ e $b=3$.

S. C.

654 — Intercalar entre as 1.ª e 2.ª linhas da 2.ª coluna: *que diferem entre si quer pela natureza quer pela ordem em que estão dispostos. Chamam-se combinações aos agrupamentos de objectos...*

J. P.