



PENSÕES DE SOBREVIVÊNCIA NO SÉCULO XIX: USO DE PRINCÍPIOS DO CÁLCULO ACTUARIAL, POR DANIEL AUGUSTO DA SILVA

A assistência proporcionada pelos montepios de sobrevivência portugueses, na forma de pensões a favor dos herdeiros dos seus sócios, após falecerem, assumia, no século XIX, importância inegável do ponto de vista da previdência social, numa época em que o Estado não cumpria essa função. A fundamentação científica dos planos de pensões era essencial para garantir a prosperidade dessas associações de socorros mútuos e os contributos do matemático Daniel da Silva, na década de 1860, constituem novidade nesse campo.

Até ao primeiro quartel do século XX, os montepios de sobrevivência portugueses não tinham os seus planos de pensões (ditas *de sobrevivência*) organizados segundo os princípios da Ciência Actuarial. A regra básica — *encargos presentes e futuros devem ser saldados pela receita provável* — não foi acautelada na construção desses planos.¹ De facto, já nas primeiras associações, criadas em finais do século XVIII, os valores de contribuições (pagas pelos sócios, subscritores do plano) e pensões legadas não dependiam da idade do beneficiário, de tal modo que contribuiriam com iguais importâncias os membros que, por exemplo, tivessem como beneficiárias uma idosa mãe, cuja pensão poucos anos duraria, ou uma jovem esposa, com perspectiva de vida longa. Acrescia o facto de a maioria dos planos permitir grande variedade de beneficiários (não definidos no momento

de entrada) e transmissão de pensões.² Semelhantes características impossibilitavam a previsão de encargos futuros e a determinação da receita necessária para os cumprir. O princípio filantrópico, próprio das associações mutualistas, estará na base de tal permissividade. O desconhecimento dos princípios em que se deveria fundar essa forma de assistência conduziu os fundadores dessas instituições a aprovar semelhantes planos, situação que perdurou durante o século XIX.

Do ponto de vista matemático, os conceitos envolvidos na construção de tabelas de contribuições e de pensões não são avançados. O cálculo de anuidades vida combina o uso de juros compostos (compreendidos e aplicados já na Idade Média) com a teoria de probabilidades aplicadas à vida humana, expressa em tábuas de mortalidade

(devido-se a Edmund Halley o primeiro contributo — em texto de 1693, usa a sua tábua de mortalidade da cidade de Breslaw para definição do preço de uma anuidade vida).³ Na sua forma mais simples, a teoria necessária para fundamentar fundos de pensões foi estabelecida por Abraham de Moivre, em *Annuities upon Lives* (1725), sendo que nos inícios do século XIX existiam inúmeros tratados sobre anuidades vida e seguros vida, com destaque para os britânicos. (Com efeito, a historiografia destaca autores britânicos na fundação da Ciência Actuarial e seus desenvolvimentos nos séculos XVII a XIX, sendo também britânicas as primeiras sociedades fundadas sobre bases científicas.)

Para as instituições portuguesas, o uso dessa teoria estava dificultado pela falta de estatísticas de mortalidade da população que fossem credíveis. A escolha de uma tábua de mortalidade estrangeira que pudesse ser adoptada para a elaboração das tabelas de contribuições e de pensões era, portanto, tarefa difícil. A partir de 1864, os censos populacionais passam a realizar-se segundo orientações do *Congrès International de Statistique*, o que possibilitou recolhas estatísticas mais fiáveis. (As mesmas dificuldades se observaram em instituições estrangeiras similares — inicialmente, a inexistência de estatísticas e a dificuldade na definição de planos de assistência. Ainda, a descrença na autoridade dos actuários, que se prolongou para lá da institucionalização da profissão.)

Daniel da Silva investigou, numa segunda fase da sua produção científica, temáticas menos exigentes do ponto de vista científico. Iniciou o estudo da viabilidade de planos de pensões em montepios de sobrevivência (assuntos actualmente classificados na área do Cálculo Actuarial) quando ingressou no Montepio Geral (MPG), na década de 1860, após tomar consciência da sua instabilidade financeira. Não sendo pessoa abastada, a protecção contra infortúnios e a garantia de que, após falecer, os seus herdeiros (esposa e filho, nascido em 1866) teriam futuro desafogado, do ponto de vista financeiro, seriam asseguradas pela sua afiliação a montepios desse tipo, razão pela qual possamos reconhecer o empenho nessa análise. Estudou o plano de pensões do MPG, por iniciativa própria, e os de outros montepios da mesma espécie, no âmbito de uma comissão oficial, nomeada em 1866, para estudar a prosperidade das associações de socorros mútuos e aconselhar o governo sobre formas de garantir o seu progresso, também segundo directrizes do *Congrès International de Statistique*. Em termos de textos publicados, contabilizam-se dois extensos relatórios sobre o plano do MPG e dois

artigos de maior abrangência, publicados pela Academia das Ciências de Lisboa, de que era sócio de mérito. Proseguimos com uma perspectiva geral dos seus contributos, com mais pormenor no primeiro texto que compôs, *O presente e o futuro do Monte Pio Geral*.

Conhecia a teoria necessária para a organização científica dos fundos de pensões dos montepios de sobrevivência portugueses, mas estava consciente de que não estavam reunidas as condições para a sua aplicação. Procedeu ao que actualmente (e, à data, já no Reino Unido) se denomina de avaliação actuarial do plano de pensões do MPG (a determinação de um valor actuarial das responsabilidades existentes e das contribuições necessárias para a sua exequibilidade). O método que concebeu, adaptado às características do plano e estatísticas existentes (listas anuais de membros admitidos, respectivas idades e capitais subscritos; valores anuais de pensões, mas não listas de beneficiários, nem suas idades), é baseado na avaliação de risco colectivo e faz uso de conceitos básicos da teoria de anuidades vida, presentes em textos clássicos, e de Cálculo Financeiro. Considerou como modelo o grupo de sócios admitidos em certo período (1858–1864), para o qual determinou valores de contribuições e pensões, até que todos falecessem, supondo que a mortalidade seguia a tábua de Déparcieux (ponderou imprecisões daí decorrentes e supôs que um cenário mais favorável assumia por essa tábua “acusar uma lei de mortalidade menos rápida” do que a mortalidade da população portuguesa.) ([7], 38). Nas opções tomadas nessa modelação aumentou despesas e diminuiu receitas e justificou essa atitude preventiva, a qual está em linha com práticas actuariais actuais que aconselham a adopção de uma postura mais pessimista do que optimista. A sistematização dos cálculos é feita em extenso mapa, de 13 páginas (fig. 1).

As contribuições anuais relativas a cada uma das idades representativas do grupo modelo de sócios (dos 21.5 aos 60.5 anos) são as parcelas da fórmula de uma *anuidade unitária sobre uma vida A*, até ao seu falecimento:

$$\frac{1}{a} \left[\frac{a'}{1+r} + \frac{a''}{(1+r)^2} + \dots \right],$$

onde a designa o número total de indivíduos com a idade de A ; a' , a'' , ... os números de indivíduos vivos com mais 1, 2, ... anos do que A e r a taxa de juro anual (média aritmética das taxas observadas), somas essas afectas de um factor, o capital subscrito correspondente a cada idade. Os números anuais de associados, para cada idade, obtêm-se da adaptação da tábua de mortalidade a idades intermédias

N.º

Mapa da importância das contribuições dos sócios de monte p[er] geral, e das pensões reduzidas tanto a receita como a despesa à época da entrada das se coincidem com a estatística das admissões

IDADE DOS SÓCIOS À ENTRADA	IDADE PARA A ENTRADA POR CADA SÓCIO	COTA ANUAL	NÚMERO DAS ENTRADAS	1.º ANNO		
				Produto total das quotas relatado ao princípio do contrato	Produto das quotas relatado ao princípio do contrato	Número de sócios existentes ao princípio do anno
21 1/2	54000	54040	106,9	534.4500	538.6776	106,9 $\frac{808-8}{812}$
25 1/2	54000	54040	107,6	888.6000	595.6904	107,6 $\frac{770-8}{778-8}$
28 1/2	64500	56040	230,8	1.500.2200	1.163.2232	230,8 $\frac{746-8}{748-8}$
31 1/2	84000	56280	305,4	2.443.2200	1.612.6512	305,4 $\frac{722-8}{722-8}$
34 1/2	94500	60000	282,3	2.681.6188	1.693.6800	282,3 $\frac{698-8}{698-8}$
37 1/2	12.000	6.270	442,5	5.310.6000	2.973.6500	442,5 $\frac{674-7}{674-7}$
40 1/2	15.000	7.440	282,6	3.789.6000	1.879.6344	282,6 $\frac{650-7}{650-7}$
43 1/2	18.000	8.610	226,3	4.048.2200	1.835.6184	226,3 $\frac{626-7}{626-7}$
46 1/2	21.000	8.880	145,7	3.009.2700	1.293.6816	145,7 $\frac{602-8}{602-8}$
49 1/2	24.000	9.690	132,3	3.199.2200	1.279.6680	132,3 $\frac{578-9}{578-9}$
52 1/2	28.000	11.280	101	2.828.6000	1.139.6280	101 $\frac{554-11}{554-11}$
55 1/2	32.500	13.640	67,5	2.193.2275	907.6200	67,5 $\frac{530-12}{530-12}$
58 1/2	37.000	15.690	36,5	2.096.2500	881.6400	36,5 $\frac{506-12}{506-12}$
60 1/2	40.000	17.040	16	640.6000	272.6040	16 $\frac{482-13}{482-13}$
Sommas				35.305.6090	18.466.4368	
				$i + \frac{1}{i} r$	$i + r$	

(4) Neste mappa supõe-se que todas as subscrições são de 100.000 réis, e a'íle significam:
 Sabe quanto por certo rendem os capitais da associação (produto líquido);
 F_1, F_2, \dots , sommas que devem multiplicar 100.000 réis para ser a quota annual correspondente a essa a amortização annual das pensões, isto é, a sua percentagem de diminuição em cada anno, em relação as quotas inscritas em cada columna devem supor-se affectas dos denominadores e multiplicadores de cada um dos grupos;
 As pensões de anno anterior.
 scriptos nos respectivos sommas.

legadas pelos fallecidos, computadas estas no seu valor total até à sua extinção, cios, e suppondo que n'essa epocha o numero e a idade dos admittidos na sociedade nos annos de 1858 a 1864 (a)

2.º ANNO			3.º ANNO		4.º ANNO	
Numero de pensões assignadas ao principio do anno	Totalidade das quotas relatada ao principio do contracto	Importancia das quotas até a extinção relatada ao principio do contracto	Totalidade das quotas	Importancia das pensões	Totalidade das quotas	Importancia das pensões
106,9 $\frac{8}{812}$	533.4502	106.6033	528.6028	106.6033	522.6654	106.6033
197,6 $\frac{8}{770}$	985.6357	205.2298	975.6210	205.2298	964.6803	205.2298
230,8 $\frac{8}{746}$	1.500.2708	247.6507	1.138.6284	247.6507	1.125.6810	247.6507
305,4 $\frac{8}{722}$	1.594.6645	338.6393	1.376.6778	338.6393	1.358.6944	338.6393
282,3 $\frac{8}{698}$	1.674.6387	323.6553	1.634.6974	323.6553	1.635.6561	323.6553
442,5 $\frac{7}{674}$	2.942.6763	458.6889	2.911.6926	458.6889	2.881.6089	458.6889
282,6 $\frac{7}{650}$	1.859.6229	270.6367	1.830.6114	270.6367	1.818.6999	270.6367
226,3 $\frac{7}{626}$	1.814.6890	248.6704	1.794.6395	248.6704	1.774.6308	248.6704
145,7 $\frac{8}{602}$	1.276.6876	190.6769	1.239.6305	190.6769	1.240.6879	248.6704
132,3 $\frac{9}{578}$	1.290.6027	204.6727	1.238.6190	227.6474	1.214.6189	204.6727
101 $\frac{11}{554}$	1.119.6700	200.6180	1.094.6120	200.6180	1.069.6427	200.6180
67,5 $\frac{12}{530}$	889.6265	185.6769	865.6330	185.6769	842.6604	185.6769
36,5 $\frac{12}{506}$	857.6677	132.6070	833.6654	132.6070	810.6231	132.6070
16 $\frac{13}{482}$	264.6885	45.6514	257.6130	45.6514	248.6779	45.6514
	18.218.6064	3.148.6373 f_1	17.967.6870	3.171.6120 f_2	17.708.6388	3.202.6393 f_3
	$(1+r)^2$	$(1+r)(r+s)$	$(1+r)^2$	$(1+r)^2(r+s)$	$(1+r)^4$	$(1+r)^2(r+s)$

Figura 1: Primeira página do mapa de receitas e despesas do plano de pensões do MPG (1858–1864) ([7], 44–45).

— usando interpolação linear, considerou uma distribuição uniforme do número de mortes entre idades inteiras (prática actuarial usual).⁴ Para a determinação dos valores das pensões, reconhece: “era necessário, em rigor, saber o número de anos que cada uma delas provavelmente deve durar.” ([7], 13). Não dispondo desses dados, elaborou um método assente no conceito de amortização anual das pensões (razão entre a diminuição que as pensões, pagas em cada ano, sofre no ano seguinte e as pensões pagas nesse ano) e, da hipótese de equilíbrio entre receitas e despesas relativas ao grupo modelo de sócios, obteve o valor necessário para esse factor, que compara com a média aritmética dos valores observados no mesmo período. Dessa forma concluiu a inviabilidade do plano. Propôs medidas que minimizavam a incorrecta fundamentação, maiorita-

¹ Em linguagem actuarial actual, dir-se-ia que não se observou a equação de financiamento geral: *valor actual do fundo + valor actuarial das contribuições futuras = valor actuarial dos benefícios futuros*.

² No Montepio Geral (o mais próspero desses montepios, que serviu de modelo para vários outros), as contribuições dependiam do capital subscrito pelo sócio e da sua idade no momento da subscrição; as pensões eram função do número de anos contributivos e do capital subscrito. Essa forma não sofreu consideráveis alterações desde a fundação em 1840 até à década de 1920. Como beneficiários eram permitidos viúva, filhos, pai, mãe, irmãos do sócio ou, inclusive, não familiares, por ele designados, havendo cessação de direitos por casamento, maioridade ou emprego dos pensionistas.

³ *Anuidade/renda sobre a vida humana* (ou simplesmente *anuidade vida*) é uma sucessão de pagamentos equidistantes, garantindo um benefício periódico, que se prolonga enquanto o grupo de vidas de que depende não se extingue. A venda de anuidades vida pelos Estados era prática comum desde a Idade Média, como forma de aumentar receitas.

riamente ao nível das pensões legadas, evitando a bancarrota da instituição.

A receptividade das suas propostas, por parte da generalidade dos associados, foi bastante reduzida, inclusive com manifestações questionando a sua honestidade e a sua integridade. A dificuldade em lidar com a previsão de acontecimentos futuros dependentes da probabilidade da vida justifica a relutância em aceitar medidas preventivas que reduzissem direitos considerados adquiridos (o legar de uma pensão de valor estipulado aquando da entrada na instituição, contra o pagamento de valor também definido à entrada), numa época em que a instituição apresentava saldo avultado. (Tais instituições teriam, naturalmente, reduzido número de sócios falecidos nos primeiros anos de existência, avolumando-se a receita e sendo diminuta a despesa com pensionistas). A sua escrita é pontuada com frequentes considerações sobre princípios mutualistas.

Produziu investigações mais gerais sobre montepios de sobrevivência, que usou para aperfeiçoar o primeiro relatório sobre o MPG, em *Das condições económicas indispensáveis á existencia do Monte Pio Geral* (onde usou estatísticas da sociedade desde a sua fundação, em 1840). Em [6], expõe um método para determinação do valor da amortização anual média das pensões, fazendo uso de conceitos de Cálculo Financeiro e Teoria dos Números. Condições essenciais são fixadas para esse valor médio, “1.º a existencia d’um grande numero de socios; 2.º constancia d’esse numero; 3.º constancia da media das edades dos socios; e finalmente 4.º constancia da media das suas contribuições annuaes” ([6], 176). Implicitamente, assume-se uma forma da lei dos grandes números e a existência de uma população estacionária (que seria ideal do ponto de vista actuarial, pelo facto de as probabilidades de vida deduzidas de qualquer tábua de mortalidade serem precisas), mas que no MPG não ocorria (não só a associação não era exclusiva de grupos populacionais/profissionais específicos, mas também a admissão era facultativa).⁵ Em [8], efectuou um estudo comparativo da população portuguesa com o intuito de fundamentar a escolha de apropriadas tábuas de mortalidade estrangeiras a serem usadas por associações portuguesas na construção das suas tabelas. Recorre a estatísticas de duas instituições que havia compilado (do MPG e do Montepio Geral de Marinha), estatísticas oficiais e estatísticas estrangeiras apresentadas por especialistas.⁶ Esse texto é também um contributo no campo dos estudos demográficos em Portugal, o único do género publicado no século XIX.

A importância dos contributos de Daniel da Silva na

área do Cálculo Actuarial reside no facto de representarem uma novidade na constituição, sobre bases científicas, dos planos de pensões de montepios de sobrevivência portugueses, contribuindo para o seu progresso e zelando pelo futuro das famílias que dependessem desse tipo de assistência. (No caso do MPG, a adopção de parte das medidas que aconselhou foi reconhecida como fundamental para salvar a instituição da bancarrota.) A sua repercussão não está documentada. Apesar de os seus métodos poderem ser adaptados a outras instituições, a necessidade de estatísticas de cada montepio (quando não havia práticas assíduas de recolha estatística) e a enormidade de cálculos necessários poderiam limitar o seu uso. De qualquer forma, as medidas que aconselha nos seus textos, e os valores de referência que obtém, poderiam servir de modelo para instituições similares ao MPG, como, aliás, recomenda.

A sua actividade no MPG evidencia-nos quem foi exercendo as funções de actuário em Portugal, em época anterior à institucionalização da profissão e à formação em Actuariado.⁷ Até 1917, ano em que é criada uma Secção de Actuariado no MPG, contam-se matemáticos, comercialistas, professores de instituições de ensino superior ou de institutos industriais e comerciais, todos eles afiliados na instituição. A todos foi comum a dificuldade em fazer valer a autoridade da ciência.

O seu investimento ilustra habilidade e predisposição para mobilizar capacidades intelectuais no estudo de áreas das Ciências Aplicadas. Além do domínio de conhecimentos matemáticos, possuía características morais indispensáveis ao exercício da função de actuário — entre elas, integridade. Também, um apurado sentido de justiça, que, ao serviço duma associação mutualista, assume inquestionável utilidade e valor: “Não procurámos pois com cautelosa attenuação de phrase occultar uma parte das nossas convicções, persuadidos de que «meia verdade é uma mentira completa».” ([7], *advertência*).

Texto redigido sem observância do Novo Acordo Ortográfico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Martins, Ana Patrícia. “Daniel Augusto da Silva e o Cálculo Actuarial”. Tese de doutoramento em História e Filosofia das Ciências: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2013.

[2] Martins, Ana Patrícia. “Bicentenário do nascimento

de Daniel Augusto da Silva”. *Anais do Clube Militar Naval CXLIV*, Julho–Dezembro de 2014: 689–707.

[3] Martins, Ana Patrícia. “Subsídios para uma tábua portuguesa de mortalidade — o contributo de Daniel Augusto da Silva”. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 76 (suplemento), Dezembro de 2018: 187-189.

[4] Martins, Ana Patrícia. “An overview on actuarial calculus in Portugal until the late 19th century”. *Historia Mathematica* 51, 2020: 49–90. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2020.01.001>

[5] Martins, Ana Patrícia. “Contributos para a história do actuariado em Portugal anterior à fundação do Instituto dos Actuários Portugueses”. In *Para a História do Actuariado em Portugal*, 23-69, Lisboa: Instituto dos Actuários Portugueses, 2020.

[6] Silva, Daniel Augusto da. “Amortização annual media das pensões nos principaes montepios de sobrevivência portuguezes”. *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes I (III)*, Agosto de 1867): 175–187.

[7] Silva, Daniel Augusto da. *O presente e o futuro do Monte Pio Geral*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1868.

[8] Silva, Daniel Augusto da. “Contribuições para o estudo comparativo do movimento da população em Portugal”. *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes II (VIII)*, Dezembro de 1869: 255–306.

[9] Silva, Daniel Augusto da. *Das condições economicas indispensaveis á existencia do Monte Pio Geral*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1870.

Ana Patrícia Martins é licenciada em Matemática e doutorada em História e Filosofia das Ciências, professora adjunta da Escola Superior de Educação de Viseu. É investigadora em História da Matemática, com especial interesse pela História da Ciência Actuarial nos séculos XVIII e XIX. É membro do Conselho Geral do Seminário Nacional de História da Matemática e do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (CIUHCT).

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt

⁴ (em notação actual) Por exemplo, o número de indivíduos com 21.5 anos vivos após um ano, é dado por $\frac{l_{21.5}-d_{21.5}}{l_{21.5}}$, onde $l_{21.5} = \frac{l_{21}+l_{22}}{2}$ é o número de pessoas com 21.5 anos e $d_{21.5} = \frac{d_{21}+d_{22}}{2}$ é o número dessas pessoas que faleceu passado um ano. Esse quociente é afecto do factor *número de admissões*, a seguir explicado. Podendo os membros subscrever diferentes capitais aquando da sua inscrição, em múltiplos de 100\$000 réis, o *número de admissões* é considerado igual à quantidade desses múltiplos, passando a não haver distinção entre eles.

⁵ Considera-se estacionária uma população que não varia o número de indivíduos (total e por idades), ao longo do tempo.

⁶ Hubbard, Déparcieux, Quételet, Duvillard, Montferand, Kersseboom, Süssmilch, Wargentin, Muret, Halley, Farr, Milne e Finlaison.

⁷ A primeira associação profissional é criada em 1926, a Associação de Actuários Portugueses; o ensino de assuntos em Actuariado iniciou-se, em Lisboa, no 3.º quartel do século XIX no Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, no *Curso Superior de Comércio*.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Visite-nos em <https://clube.spm.pt>

