# Contrastes entre novos e antigos programas do Ensino Secundário: alguns exemplos*

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho

## 1. Introdução

O nosso objectivo é exemplificar a diferença de tratamento de alguns temas de Matemática elementar entre os "antigos" e os "novos" programas desta disciplina, a nível do Ensino Secundário.

Por programas "antigos", entendemos os programas do 10º e 11º ano de Escolaridade do extinto Curso Complementar Diurno (dito "Curso das Áreas"), que vigoraram desde o ano lectivo de 1978/1979 até ao ano lectivo de 1993/1994, bem como o programa do 12º ano via Ensino, que vigorou desde o ano lectivo de 1980/1981 até ao ano lectivo de 1994/1995. Ao longo dos anos, estes programas tiveram adaptações e ajustamentos, relativamente pequenos no caso do Curso Complementar Diurno e grandes para o 12º ano via Ensino (logo no segundo ano de existência, foi drasticamente reduzido, e sofreu mais alguns cortes em 1988/1989); tais alterações, no entanto, não afectaram os temas que vamos abordar. A carga horária semanal da disciplina foi sempre de 5 horas no 10º e 11º ano; no 12º ano começou por ser 5, foi reduzida para 4 durante alguns anos e voltou mais tarde a ser de 5 horas, valor que se manteve até à extinção do 12º ano via Ensino.

Por programas "novos", entendemos os programas do 10º, 11º e 12º ano do novo Ensino Secundário criado pelo Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, na versão de Janeiro de 1997 (conhecidos por programas "ajustados"); nos assuntos que temos em vista, estes programas coincidem com os da disciplina de Matemática A da Reforma do Ensino Secundário que está a entrar em vigor neste ano lectivo de 2004/2005 no 11º ano de escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março e Portaria n.º 550-A/2004, de 21 de Maio). A carga horária semanal dos primeiros foi de 4 horas no 10º e 11º ano e de 5 no 12º ano; a Matemática A é leccionada em três blocos de 90 minutos por semana, ao longo dos três anos do Ensino Secundário.

## 2. A sucessão definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; o número e.

Nos programas "antigos", o estudo desta sucessão era o culminar do capítulo 6 do 12º ano, *Complementos sobre sucessões*. Quando era abordado, os alunos já tinham bons conhecimentos sobre sucessões (definição e generalidades, monotonia e limitação, progressões aritméticas e geométricas, sucessões convergentes, infinitamente grandes e infinitésimos, teorema da sucessão monótona, regras operatórias dos limites, levantamento de indeterminações, soma de todos os termos de uma progressão geométrica), adquiridos no 11º ano e revistos e completados no 12º ano (teorema das sucessões enquadradas, estudo quanto à monotonia, limitação e convergência de algumas sucessões definidas por recorrência). Também já estavam fami-

* Artigo baseado numa palestra proferida na Homenagem ao Prof. Dr. Armando Machado realizada na Faculdade de Ciências de Lisboa a 16 de Fevereiro de 2005.

liarizados com o método de indução e com a fórmula do binómio de Newton.

O estudo era feito, em geral, sem grandes preocupações com a motivação ou com aplicações a "problemas da vida real" (vejam-se, por exemplo [FCG] ou [GOR2]). De forma sucinta, demonstrava-se a convergência da sucessão em causa recorrendo ao desenvolvimento de $u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ e $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pela fórmula do binómio para concluir que a sucessão é crescente e à majoração de termos do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ por potências de $\frac{1}{2}$ para obter a cadeia de desigualdades

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

O teorema da sucessão monótona garante então que $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge, sendo o seu limite um número entre 2 e 3. Definia-se $e$ como $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dizia-se que era um número irracional aproximadamente igual a 2,718 e referiam-se resultados que facilitam o estudo da convergência de sucessões deste tipo (como, por exemplo: "Se $x\in IR$ e $(a_n)$ é um infinitamente grande então $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}=e^x$").

É uma abordagem cientificamente correcta, revelando preocupação com o encadeamento lógico dos temas estudado, mas pouco motivadora e nada interessante para os alunos; recorre a uma demonstração algo complicada e que a generalidade dos alunos se apressava a esquecer, retendo apenas o último resultado referido. Refira-se que o cálculo deste tipo de limites surgia quase sempre nos exames, em exercícios que, frequentemente, requeriam artifícios algo complicados, grande virtuosismo de cálculo e habilidade na manipulação de expressões.

Nos "novos" programas, a sucessão definida por $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estudada no Tema III do 11º ano (*Sucessões*), o que, como vamos ver é, no mínimo, bizarro, para não dizer altamente criticável do ponto de vista científico. Com efeito, pretende-se o "estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira[1] definição do número $e$" (ver [P1], pág. 29 ou [P11A], pág. 8), numa altura em que os alunos ainda nem sequer sabem o que é o limite de uma sucessão!! Isto pode levar a abordagens lamentáveis do assunto, como a que exemplificamos a seguir:

**Abordagem I**

Por meio de uma calculadora, determinam-se uns tantos termos (digamos os 50 primeiros) desta sucessão; procede-se em seguida à representação gráfica e diz-se que a sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para valores grandes de $n$, se aproxima, tanto quanto quisermos, de um número chamado número de Neper, que se representa por $e$.

Neste ponto do programa, os alunos ainda **não sabem** o que é o limite de uma sucessão (fizeram-se apenas algumas referências a limites de funções, abordados de forma "experimental" com a calculadora no Tema II do 11º ano, de forma tão vaga e intuitiva que chega a ser nebulosa...); como se isso não bastasse, estamos a incutir-lhes a ideia de que basta calcular uns tantos termos e fazer uma representação gráfica para se estudar a convergência, o que é gravíssimo e constitui um dos mais flagrantes exemplos da forma como a introdução ao cálculo infinitesimal é tratada nos "novos" programas. Por outro lado, trata-se de uma sucessão que, pela sua complexidade, destoa imenso das sucessões "simples" estudadas neste tema. Que fazer para apresentar o tema com um mínimo de rigor e sem induzir em erro os alunos?

Um momento de reflexão mostra que o estudo desta sucessão está completamente fora de contexto neste tema do programa: seria preferível deixá-la para o 12º ano, no Tema II (*Introdução ao Cálculo Diferencial II*), altura em que os alunos já dispõem de conhecimentos suficientes para um estudo mais razoável. No entanto, esta maneira

1 Não seria preferível haver apenas uma definição e chamar "caracterizações" a outras que porventura surjam depois?

de proceder poderia levantar graves questões relacionadas com o incumprimento, ainda por cima deliberado, do programa em vigor. Assim, podemos optar por uma mudança menos radical: deixar o estudo para o fim do Tema III do 11º ano, já depois da introdução da noção de limite de uma sucessão, de forma relativamente rigorosa. Temos assim a seguinte proposta:

**Abordagem II**

Por meio de uma calculadora, determinam-se os 50 primeiros termos desta sucessão; procede-se em seguida à representação gráfica e diz-se que é possível provar (embora não o vamos fazer) que:

1) a sucessão definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente (difícil).
2) $2 = u_1 \leq u_n$, para todo o $n$ (evidente, a partir de 1).
3) $u_n < 3$, para todo o $n$ (difícil).

De 1), 2) e 3), conclui-se, pelo teorema da sucessão monótona[2], que a sucessão dada é convergente, para um número que vamos representar por $e$, que está entre 2 e 3.

Esta abordagem está matematicamente correcta, resolve o problema de uma apresentação rigorosa do assunto mas (e isto é um ponto de vista muito pessoal), "sabe a pouco": não seria possível demonstrar (ainda que isso seja ir além do que o programa pede) a convergência da sucessão?

Ao tentarmos proceder a uma demonstração do resultado, vemos imediatamente que não se pode usar a prova do 12º ano via Ensino. Com efeito, na altura em que ela vai ser feita, os alunos ainda não estudaram um dos seus "ingredientes" fundamentais, a fórmula do binómio, que só surge no Tema I do 12º ano (*Probabilidades e Combinatória*). Por outro lado, a prova referida não é, em nossa opinião, muito interessante ou motivadora. Felizmente, conhecem-se provas alternativas, como a que se pode ver em [KK] e que apresentamos a seguir, constituindo a "base matemática" da abordagem III.

2 Estudado na rubrica **Limites** do tema III do 11º ano.

**Abordagem III**

Por meio de uma calculadora, determinam-se os 50 primeiros termos da sucessão definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; procede-se em seguida à representação gráfica e passa-se à prova da sua convergência, pelo método que apresentamos a seguir.
Define-se $e$ como $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

A prova necessita de um lema, que é interessante por si só.

**Lema** (desigualdade de Bernoulli)
Se $\alpha > -1$ e $\alpha \neq 0$, então $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, para qualquer número natural $n$ maior que 1.

**Demonstração**
Imediata, por indução em n (recorde-se que nos "novos" programas, o método de indução matemática tanto pode ser dado no Tema III do 11º ano, para demonstrar propriedades das sucessões, como no Tema I do 12º ano, para provar propriedades combinatórias - ver [P1], pág. 36 e [P10A], pág. 21).

**Teorema**
A sucessão definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

**Demonstração**
Comecemos por provar que a sucessão dada é (estritamente) crescente. Seja $n > 1$.

$$u_{n-1} < u_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$$

e o resultado sobre a monotonia segue-se tomando no lema $\alpha = -\frac{1}{n^2}$.

Para a provar a limitação, vamos considerar uma sucessão auxiliar definida por $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e provar que ela é decrescente; como se tem obviamente $u_n < v_n$ para todo o $n$, segue-se que $2 = u_1 \leq u_n < v_n \leq v_1 = 4$ para todo o $n$ e a conclusão segue-se do teorema da sucessão monótona. A prova é muito semelhante à anterior:

$$v_{n-1} > v_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

Ora, tomando no lema $\alpha = \frac{1}{n^2-1}$, vem

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n},$$

o que conclui a prova.

**Observações:**

1. Pode ver-se em [CJ] uma outra versão desta prova, que é um pouco mais simples em termos de manipulações algébricas. No entanto, essa prova pressupõe o conhecimento da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, pelo que preferimos a demonstração apresentada. Outras demonstrações podem ser vistas em [GN] ou [DH].
2. Como a segunda parte da prova é muito semelhante à primeira, o professor pode optar por deixá-la como exercício para os alunos, o que permite inclusive que sejam eles a fazer a transformação de $\frac{n^2}{n^2-1}$ em $1+\frac{1}{n^2-1}$, um tipo de manipulação algébrica sugerido nos programas (veja-se [P1], pág. 27).
3. Tem-se obviamente $\lim v_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e.$ No entanto, o resultado não pode ser apresentado assim aos alunos, pois eles ainda não estudaram as regras operatórias dos limites; no actual 11º ano, o cálculo de limites faz-se por comparação e enquadramentos, recorrendo às chamadas "sucessões de referência"...
4. À primeira vista, pode parecer que o enquadramento obtido para e por este método é pior que o tradicional: provámos apenas que $2 < e < 4$. Basta no entanto fazer $n = 6$ na desigualdade $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ para reobter o enquadramento clássico $2 < e < 3$. Pode-se até ir bastante mais além, observando que: $|v_n - u_n| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \frac{3}{n}$, o que permite calcular o valor de $e$ com precisão arbitrária; isto terá, no entanto, que ficar para o 12º ano (e, infelizmente, não se trata de um método particularmente eficaz.....).
5. Não abordámos o problema da precisão numérica da calculadora, que surge naturalmente no estudo deste tipo de sucessões. Com efeito, para $n$ "suficientemente grande", $1+\frac{1}{n} \approx 1$ na calculadora e todos os termos da sucessão saem iguais a 1! O leitor interessado pode ver um tratamento detalhado deste problema em [CM].

Até aqui, a discussão foi apenas sobre os aspectos matemáticos do estudo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; vejamos agora como tem sido tratado a sua apresentação num "contexto de modelação matemática".

Todos os autores de manuais que consultámos recorrem, de forma mais ou menos explícita, a uma questão de Matemática Financeira: o problema da capitalização contínua, conforme é sugerido em [P1], págs. 63 e 64. Alguns usam-no como motivação para o estudo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ao passo que outros preferem abordá-lo já depois de se ter definido o número $e$, processo que preferimos utilizar. Para analisar esta aplicação da Matemática à Economia, recordemos em que consiste o regime de capitalização composto.

Se num banco colocarmos 1000 euros à taxa anual de 10%, ao fim de um ano teríamos o capital acumulado $M_1$=1000(1+0,1); ao fim do segundo ano, o capital seria

$M_2$=1000(1+0,1)(1+0,1)=1000(1+0,1)$^2$, se os juros recebidos no fim do primeiro ano fossem capitalizados, rendendo eles por sua vez também juro. Prosseguindo desta maneira, o capital acumulado ao fim de $n$ anos seria dado por $M_n$=1000(1+0,1)$^n$; em geral, para um capital inicial C e uma taxa de juro anual $i$, o capital acumulado ao fim de $n$ anos é $M_n=C(1+i)^n$. Surge então a questão: poderemos obter maior rendimento mantendo inalterada a taxa anual, mas reduzindo o período de capitalização? E será possível enriquecer em pouco tempo a partir de um pequeno capital inicial recorrendo a períodos de capitalização cada vez mais pequenos, ao semestre, ao trimestre, ao mês, ao dia, ao minuto, ao segundo....?

A resposta à primeira questão é obviamente SIM, a resposta à segunda é NÃO! Para vermos isto, podemos recorrer a uma fórmula de Matemática Financeira:

$$M_t = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt},$$

que nos dá o capital acumulado ao fim de $t$ anos, sendo

$C$ - capital inicial

$i$ - taxa de juro anual

$n$ - número de capitalizações por ano.

Supondo, para fixar ideias, que $C$ = 1 euro, $i$ = 100% e $t$ = 1 ano, vem que nunca se pode ter ao fim de 1 ano mais que $e \approx 2{,}718$ euros, uma vez que, mesmo em capitalização contínua ($n \to +\infty$), se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} M_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Mais geralmente (mas isto já pressupõe conhecimento do cálculo com limites...), o valor a receber ao fim de t anos nunca pode exceder $\lim\limits_{n\to+\infty} M_t = \lim\limits_{n\to+\infty} C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = Ce^{it}$.

Esta aplicação da Matemática a uma situação da "vida real" resulta muito bem com os alunos, em especial com os do 3º Agrupamento (Economia), que já estudaram as fórmulas do regime de capitalização composto em disciplinas da sua formação específica. Os alunos dos outros agrupamentos têm, em geral, necessidade de uma breve revisão sobre as modalidades de juros (assunto abordado no 7º ano de escolaridade).

É, em nossa opinião, uma das ideias mais felizes dos "novos" programas, contrastando fortemente com a forma menos interessante como o assunto era tratado na generalidade dos manuais do 12º ano via Ensino. Não queremos, no entanto, deixar de referir aqui uma notável excepção, o livro M12, da Texto Editora, da autoria dos Professores Armando Machado, Paulo Abrantes e Raul Carvalho: no início do capítulo dedicado aos *Complementos sobre sucessões*, começa-se precisamente por falar a possibilidade de um enriquecimento rápido reduzindo cada vez mais os intervalos de capitalização, uma abordagem surpreendentemente "moderna" para um livro editado em 1988. É ainda notável que nesse mesmo capítulo se faça já referência ao uso de calculadoras (científicas) e computadores, mencionando-se mesmo as limitações do método experimental em Matemática, por meio do exemplo do cálculo de $\lim\left(\frac{n+1}{n+5}\right)^{3n-6}$, que dá $e^{-12}$ e não zero, como uma utilização descuidada da calculadora ou computador poderia sugerir ([M12], pág. 186).

## 3. Determinação das raízes reais de polinómios de coeficientes reais.

A diferença entre o estudo deste assunto nos "antigos" e nos "novos" programas reside essencialmente na possibilidade que agora se tem do uso de calculadoras gráficas sofisticadas. No fim do 9º ano, os conhecimentos sobre polinómios e equações dos alunos de hoje são (teoricamente....) iguais aos de há vinte anos: noção de polinómio, operações com polinómios (excluindo a divisão inteira), casos notáveis da multiplicação e factorização em casos simples, resolução de equações do primeiro e do segundo grau (estas últimas pela fórmula resolvente). Nos programas "antigos", os polinómios surgiam no 10º ano, integrados no capítulo "Expressões designatórias"; nos "novos" programas, são estudados também no 10º ano, mas num contexto algo diferente, de estudo de funções, no Tema II (*Funções e gráficos-Generalidades. Funções polinomiais.*

*Função módulo*). As diferenças, se excluirmos as devidas ao uso das calculadoras, são, no entanto poucas, conforme se pode constatar consultando os manuais existentes: depois do estudo da divisão inteira de polinómios, com particular incidência na divisão por $x - a$ feita na prática pela regra de Ruffini, segue-se o Teorema do Resto[3] e a decomposição de polinómios em factores em casos simples (estudo completo para polinómios quadráticos; para graus superiores apenas se estudam casos em que seja possível descobrir facilmente raízes ou se possam aplicar os casos notáveis da multiplicação) e, esporadicamente, alguns assuntos um pouco mais avançados, como a noção de multiplicidade de uma raiz ou o teorema que diz que um polinómio de grau $n$ não pode ter mais que $n$ raízes[4]. Métodos mais sofisticados de cálculo de raízes, como as fórmulas resolventes para equações do 3º e do 4º grau, não eram abordados nos programas "antigos" e continuam a não o ser nos "novos". A nível de 12º ano, costuma fazer-se uma referência ao método da bissecção quando do estudo do Teorema de Bolzano, mas não é dada, em geral, grande relevância ao assunto. No 12º ano via ensino, resolviam-se alguns problemas de separação de zeros, a propósito do teorema de Rolle e seus corolários, o que já não se faz actualmente, dado que este teorema não figura nos "novos" programas. Embora muitos desses problemas até se possam resolver por considerações simples de monotonia estudada através do sinal da derivada, eles pura e simplesmente deixaram de "estar na moda", por motivos óbvios.

Com as calculadoras actualmente existentes no mercado, a situação mudou: é possível, pelo menos em princípio[5], obter facilmente as raízes reais de um polinómio, com grande aproximação. De um modo geral[6], o utilizador começa por definir o chamado rectângulo de visualização, uma versão discreta (ou, de forma talvez mais expressiva, pixelizada...) do rectângulo de $IR^2$ $[\mathrm{xmin},\mathrm{xmax}]$x$[\mathrm{ymin},\mathrm{ymax}]$, onde os parâmetros $\mathrm{xmin}$, $\mathrm{xmax}$, $\mathrm{ymin}$ e $\mathrm{ymax}$ têm significados óbvios, e depois a calculadora determina os zeros que estão entre $\mathrm{xmin}$ e $xmax$. Se, por acaso, não detectar zeros no intervalo $[\mathrm{xmin},\mathrm{xmax}]$, emite uma mensagem apropriada, como "Not Found" (CASIO CFX-9850G) ou "ERR: NO SIGN CHNG" (TI-83). É pois muito conveniente dispor de um processo que nos permita, à partida, escolher um intervalo $[\mathrm{xmin},\mathrm{xmax}]$ que contenha todos os possíveis zeros. Repare-se que, em princípio, o intervalo $[\mathrm{ymin},\mathrm{ymax}]$ é relativamente irrelevante, se $[\mathrm{xmin},\mathrm{xmax}]$ estiver bem escolhido: desde que $0\in]\mathrm{ymin},\mathrm{ymax}]$, o gráfico exibido no ecrã exibirá a região em torno do zero e sabendo $\mathrm{xmin}$ e $\mathrm{xmax}$, a máquina determina automaticamente valores para $\mathrm{ymin}$ e $\mathrm{ymax}$, que podem ser depois refinados manualmente. Uma resposta excelente à questão da determinação de $[\mathrm{xmin},\mathrm{xmax}]$ foi dada na secção *Consultório Matemático* do n.º 36 do Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, secção essa que na altura era de responsabilidade do Prof. Armando Machado. É essa resposta ([MA]) que passamos a referir.

Antes de mais, repare-se que nada se perde ao supor que o polinómio em causa é mónico: se não for esse o caso, basta dividir ambos os membros da equação pelo coeficiente principal do polinómio. Temos então a seguinte proposição:

**Proposição**

Sejam $n$ um número natural e, para cada $i$ tal que $1 \le i \le n$, $a_i \in IR$. Seja $M \ge 0$ o maior dos $n$ números $|a_i|$. Para cada $x \in IR$ tal que $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, tem-se então que $|x| \le M + 1$, por outras palavras, podemos tomar $\mathrm{xmin} = -M - 1$ e $\mathrm{xmax} = M + 1$.

3 O resto da divisão do polinómio $p(x)$ por $x$-$\alpha$ é $p(\alpha)$.
4 Em [P1], pág. 54, refere-se uma versão do Teorema da raiz racional, (se $p$ é um zero inteiro de um polinómio de coeficientes inteiros, $p$ divide o termo constante), mas o assunto tem sido praticamente ignorado nos manuais. Vejam-se [MA] ou [RA1] para mais detalhes.
5 Há por vezes falhas "estranhas": experimente-se resolver a equação $x^2=0$ numa TI-83.
6 Alguns modelos, como a CASIO CFX-9850G, têm menus para a resolução directa de equações do segundo e terceiro grau, apresentando inclusive raízes complexas; há ainda a hipótese de recorrer às capacidades de programação destas máquinas para resolver o problema, como se pode ver em [TI] .
7 Não vamos abordar aqui os problemas que esta discretização por vezes causa; o leitor interessado pode consultar [CM] para um estudo detalhado.

**Demonstração**

Seja x um número real solução da equação dada. Podemos desde já supor que $|x|>1$, pois nada há a provar se esta desigualdade não se verificar. Vem então

$$|x|^n = \left|x^n\right| = \left|a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\right| \leq$$
$$\leq |a_1||x|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}||x| + |a_n| \leq$$
$$\leq M\left(|x|^{n-1} + \ldots + |x| + 1\right) \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

(repare-se que a soma dentro do parêntesis é a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $|x|$ e primeiro termo 1). Segue-se que

$$|x|^n \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

donde

$$|x| - 1 \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x|^n} \leq M$$

e tem-se o resultado.

**Observações**

1. Esta proposição aparece enunciada sem demonstração na brochura de Funções para o 10º ano ([F10]), bem como nalguns manuais escolares ([CRM], por exemplo).
2. Pensamos que a proposição acima deve ser enunciada no 10º ano de escolaridade e demonstrada no Tema III do 11º ano (*Sucessões*). Com efeito, nessa altura os alunos já adquiriram todos os conhecimentos necessários (essencialmente, saber trabalhar com módulos e utilizar fórmulas das progressões geométricas) e esta regra é um exemplo feliz da "simbiose" entre os métodos clássicos e as novas tecnologias: ao pretender resolver-se um problema clássico por meio das calculadoras, somos conduzidos a outro problema que por sua vez é resolvido por métodos mais tradicionais.

## 4. A regra de Ruffini, há vinte anos e actualmente

A forma de apresentação da regra de Ruffini é igual nos dois programas que temos vindo a considerar: estudada no 10º ano (com demonstração), ela surge como uma maneira prática de efectuar a divisão de um polinómio por um binómio do tipo $x - a$, sendo utilizada com frequência em questões como a decomposição de polinómios em factores e a determinação de raízes. Vamos nesta secção indicar algumas aplicações menos vulgares da regra de Ruffini, que nos parecem ser especialmente adequadas aos novos programas.

**1ª aplicação: uma versão simplificada do Teorema da raiz racional**

Como se sabe, este teorema afirma que se $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é um polinómio de coeficientes inteiros com $a_0$ e $a_n$ não nulos, qualquer raiz racional de $p(x)$ pode ser escrita na forma $p/q$, com $p$ e $q$ inteiros primos entre si, sendo $p$ divisor de $a_n$ e $q$ divisor de $a_0$.

O resultado que nos propomos provar é o seguinte: "Se $a$ é um zero inteiro do polinómio de coeficientes inteiros $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0$ e $a_n$ não nulos, então $a$ divide o termo independente $a_n$" (vejam-se a nota 4 do presente trabalho e [P1], pág. 54).

Para o provar, recordemos o enunciado e uma demonstração usual da regra de Ruffini:

"Sejam $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ um polinómio de grau $n$, e $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$ e $R$ o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$, respectivamente. Então, tem-se que

$$\left\{\begin{array}{r} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ R = aq_{n-1} + a_n \end{array}\right. ."$$

**Demonstração (da regra de Ruffini)**

Como $p(x)=(x-a)q(x)+R$, efectuando as operações e identificando os coeficientes dos termos de igual grau nos dois membros, segue-se que

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ R = aq_{n-1} + a_n \end{cases}$$ , como desejávamos.

**Demonstração (da versão simplificada do Teorema da raiz racional)**

Suponhamos que o polinómio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ tem coeficientes inteiros, com $a_0$ e $a_n$ não nulos e seja $a$ um seu zero inteiro. Sejam $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$ e $R$ o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$. Pelo Teorema do Resto, $R = 0$ e vem então

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ 0 = aq_{n-1} + a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ a(-q_{n-1}) = a_n \end{cases},$$

donde se segue que todos os coeficientes de $q(x)$ são inteiros e $a$ divide $a_n$, como queríamos.

Pensamos que o resultado acima pode ser apresentado como corolário da justificação da regra de Ruffini preconizada no programa em vigor.

**2ª aplicação: economia de operações e ganho de precisão**

Nos "novos" programas do 11º ano ([P1], pág. 27), surge a seguinte *Indicação Metodológica*, a propósito do estudo das funções racionais:

"...o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como $\frac{x^2+2}{x+1}$ em $x-1+\frac{3}{x+1}$ ou $\frac{x+3}{x+1}$ em $1+\frac{2}{x+1}$ e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações.".

O problema da economia de operações, praticamente ignorado nos programas "antigos", é um assunto pertinente em cálculo numérico e a sua abordagem nos "novos" programas é, em nossa opinião, positiva. Sucede, no entanto, que é possível referi-lo de forma mais natural e completa a nível de 10º ano. Com efeito, seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ um polinómio e suponhamos que pretendemos calcular o seu valor num certo ponto $a$. Se nos limitarmos a substituir o valor de $a$ na expressão anterior, teremos de efectuar um total de $n$ adições (algébricas) e $2n$-1 multiplicações. Ora, pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é precisamente $p(a)$ e como este resto pode ser obtido pela regra de Ruffini com $n$ adições e $n$ multiplicações, temos assim uma economia considerável de cálculo; para um exemplo concreto, pode consultar-se [GM]. Neste contexto, a regra de Ruffini costuma ser conhecida como *algoritmo de Horner*.

**3ª aplicação: que sucede se aplicarmos repetidamente a regra de Ruffini?**

A título de exemplo, consideremos o polinómio $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ e dividamo-lo pelo binómio $x - 1$; em seguida, dividamos por $x - 1$ o quociente obtido e assim sucessivamente. Obtemos o seguinte esquema:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | -1 | 1 | |
| 1 | | 3 | 5 | 4 | |
| | 3 | 5 | 4 | 5 | $=R_1$ |
| 1 | | 3 | 8 | | |
| | 3 | 8 | 12 | $=R_2$ | |
| 1 | | 3 | | | |
| | 3 | 11 | $=R_3$ | | |
| 1 | | | | | |
| | 3 | $=R_4$ | | | |

Surge então a questão: qual a relação (se alguma existe) entre o dividendo inicial, o divisor e os sucessivos restos?

Sabemos que o primeiro resto é $p(1)$; verifica-se imediatamente que $R_2 = p'(1)$, que $R_3 = p''(1)/2!$ e que $R_4 = p'''(1)/3!$. Para manter a exposição a nível do 12º ano, analisaremos apenas o caso do segundo resto $R_2$, deixando ao cuidado do leitor os restantes (sugestão: fórmula de Taylor).

Concretamente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

"Sejam $p(x)$ um polinómio de grau maior ou igual que 1 e $a$ um número real qualquer. Pondo

$q_1(x)$ = quociente da divisão de $p(x)$ por $x - a$

$R_1$ = resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$

$q_2(x)$ = quociente da divisão de $q_1(x)$ por $x - a$

$R_2$ = resto da divisão de $q_1(x)$ por $x - a$,

tem-se que $R_2 = p'(a)$."

**Demonstração**

Sabe-se que

$p(x) = (x - a)q_1(x)+R_1$

$q_1(x) = (x - a)q_2(x)+R_2$;

se derivarmos em ordem a $x$ a primeira igualdade, vem $p'(x) = (x - a)q'_1(x)+q_1(x)$. Fazendo nesta expressão $x = a$, obtém-se $p'(a) = q_1(a)$ (1).

Por outro lado, fazendo $x = a$ na igualdade $q_1(x) = (x - a)q_2(x)+R_2$, vem $q_1(a) = R_2$ (2); o resultado segue-se imediatamente das igualdades (1) e (2).

Para concluir, vamos utilizar esta última proposição para fazer uma "ponte" entre o Ensino Secundário e o Superior, aplicando-a a um problema de cálculo numérico.

Um dos métodos mais conhecidos para determinar raízes de equações não lineares é o processo iterativo conhecido como *Método de Newton*: se pretendemos determinar um zero de uma função $f$, definida num intervalo $[a,b]$, tomamos $x_0 \in [a,b]$ e definimos uma sucessão $(x_n)$ por meio de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Em condições não muito restritivas, prova-se que a sucessão assim definida converge para o (único) zero de $f$ em $[a,b]$(veja-se, por exemplo, [VM], págs. 39 a 43). Este método tem, no entanto, um inconveniente: exige em cada iteração o cálculo do valor da derivada, o que pode ser aborrecido se a expressão da derivada for complicada ou o cálculo dos seus valores pouco eficiente comparado com o cálculo de valores da função. Uma solução é substituir a derivada $f'(x_n)$ pela razão incremental $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, obtendo-se o conhecido *método da secante*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}.$$

No entanto, se estivermos apenas interessados no cálculo de raízes de polinómios, a proposição anterior dá-nos um método muito eficaz de calcular $f(x_n)$ e $f'(x_n)$: basta aplicar duas vezes a regra de Ruffini, com o dividendo inicial $f(x)$ e o divisor $(x - x_n)$. Esta observação muito simples é a base de um algoritmo para cálculo de raízes de polinómios conhecido como *método de Bierge-Viète*.

## 5. Referências

**Gerais**

[CJ] Carneiro, J. P. (1997) - A poderosa desigualdade das médias, *Boletim da SPM*, 36, 23 - 30.

[CM] Consciência, M. (2003) - Calculadoras gráficas - algumas limitações, *Gazeta de Matemática*, 145, 34 - 42.

[CaM] Carpentier, M. (1998) - *Métodos Numéricos*, Lisboa, Associação de Estudantes do Instituto Superior Técnico.

[CSJ] Carvalho e Silva, J. (2003) - Novos programas de Matemática no Ensino Secundário - 2003/2004, *Gazeta de Matemática*, 145, 10 - 17.

[DH] Dörrie, H. (1965) - 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, New York, Dover Publications Inc. (tradução da 5ª edição alemã de 1958).

[F10] Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C. , Antunes, C. e Nápoles, S. (1997) - *Funções - 10º ano de escolaridade*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[GM] Graça, M. M. (2000) – Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular, *Gazeta de Matemática*, 139, 15-21.

[GN] Narciso, G. (1985) - *O número e*, Amadora, Editora Danúbio Lda.

[KA] Kurosh, A. (1973) - *Cours d'Algèbre Supérieure*, Moscou, Éditions MIR.

[KK] Knopp, K. (1990) - *Theory and Application of Infinite Series*, New York, Dover Publications Inc. (tradução da 4ª edição alemã de 1947).

[MA] Machado, A. (1997) - Resposta a uma questão na secção *Consultório de Matemática, Boletim da SPM*, 36, 61 - 64.

[OA] Ostrowski, A. (1976) - *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, vol. I, 3ª. edição, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian (tradução da edição alemã de 1960).

[P1] Equipa Técnica (1977) - *Matemática - Programas*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[P10A] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A - 10º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec.org).

[P11A] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A - 11º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em `www.mat-no-sec.org`).

[PH] Pina, H. (1995) - *Métodos Numéricos*, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal.

[PF] Pontes, F. e Filipe, J. (1995) - *As calculadoras e o Ensino*, Lisboa, Beltrão Coelho Lda.

[PY] Parelman, Y. (1979) - *Matemáticas Recreativas*, Lisboa, Litexa.

[RA1] Rosa, A. (2002) - Números Irracionais no Ensino Secundário, *Gazeta de Matemática*, 142, 32 - 36.

[RA2] Rosa, A. (2003) - Matemática 10º ano (Programa Ajustado) e Matemática A (10º ano): que diferenças?, *Gazeta de Matemática*, 145, 18 - 21.

[TI] Texas Instruments (versão portuguesa de Nélson Sousa) (s/d) - *Equações* TI 80 TI 81 TI 82 TI 83 TI 92, Texas Instruments.

[VM] Valença, M. R. (1990) - *Métodos Numéricos*, Braga, Instituto Nacional de Investigação Científica.

**Manuais dos programas "antigos"**

[FG] Freitas, A. C. e Gomes, F. (1981) - *Matemática 10º ano* Tomo 1 (2ª ed.), Lisboa, Livraria Popular de Francisco Franco.

[FCG] Freitas, A. C., Coimbra, E. e Gomes, F. (1987) - *Matemática 12º ano de escolaridade (via ensino)* Vol. I, Lisboa, Livraria Popular de Francisco Franco.

[GOR1] Garcia, M., Osório, A. e Ruivo, A. (1982) - *Compêndio de Matemática 10º ano de escolaridade* 1º Vol. (8ª reimp. da 1ª ed.), Porto, Porto Editora

[GOR2] Garcia, M., Osório, A. e Ruivo, A. (1988) - *Compêndio de Matemática 12º ano de escolaridade* 2º Vol., Porto, Porto Editora.

[M10] Abrantes, P. e Carvalho, R. F. (1983) - *M10 - Matemática 10º ano* (1ª ed.), Lisboa, Texto Editora.

[M12] Machado, A., Abrantes, P. e Carvalho, R. F. (1988) - *M12 - Matemática 12º ano* (3ª ed.), Lisboa, Texto Editora.

[NVA] Neves, M. A., Vieira, M. T. e Alves, A. G. (1986) - *10º Matemática* (reimp. da 1ª ed.), Porto, Porto Editora.

**Manuais dos programas "novos"**

[BV] Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P. e Bastos, R. (2003) - Matemática 10 vol. 2: *Funções/Estatística*, Porto, Edições Contraponto. **

[LB] Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Viana, J. P. e Bastos, R. (1998) - *Matemática 11 Sucessões*, Porto, Edições Contraponto. *

[CRM] Costa, B., Resende, L. e Rodrigues, M. E. (2003) - *Espaço 10*, Porto, Edições ASA. **

[GVL] Gomes, F., Viegas, C. e Lima, Y. (2003) - XEQMAT (*Matemática A - 10º ano*) vol. 1, Lisboa, Editorial O Livro. **

[GL] Gomes, F. e Lima, Y. (s/d) - XEQMAT (*Matemática - 11º ano*), Lisboa, Editorial O Livro. *

[GV] Gomes, F. e Viegas, C. (2004) - XEQMAT (*Matemática - 11ºano*) vol. 2, Lisboa, Texto Editora. **

[JB1] Jorge, A. M., Alves, C., Fonseca, G. e Barbedo, J. (2003) - *Infinito 10 A* - Parte 2, Porto, Areal Editores. **

[JB2] Jorge, A. M., Alves, C., Fonseca, G. e Barbedo, J. (2004) - *Infinito 11 A* - Parte 3, Porto, Areal Editores. **

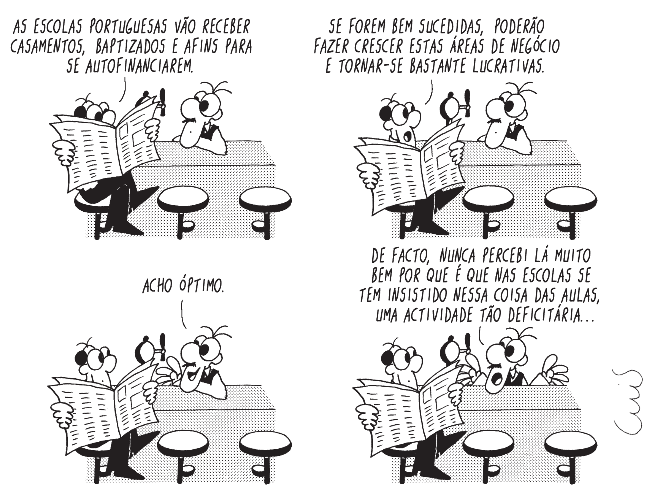
[NG] Neves, M. A. e Guerreiro, L. (2003) - *Matemática A 10º ano - Funções I*, Porto, Porto Editora. **

[NGM] Neves, M. A., Guerreiro, L. e Moura, A. (2004) - *Matemática A 11º ano - Sucessões*, Porto, Porto Editora. **

[NM] Neves, M. A. (2001) - *Matemática 11º ano - Parte 3: Sucessões*, Porto, Porto Editora. *

* programa "ajustado".
** programa de Matemática A.

# Bartoon




Luís Afonso, Público, 27-08-2006
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)