A Quadratura dos Polígonos

O célebre problema da quadratura do círculo pede uma construção com régua e compasso que permita, dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.

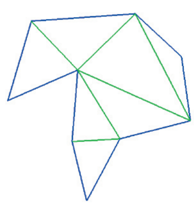
Este problema é impossível, como mostrou Lindemann em 1882, já que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

O problema de que nos ocupamos hoje, pelo contrário, é possível. É até fácil de resolver.

Dado um polígono, será possível cortá-lo em pedaços, com golpes rectilíneos de tesoura, de forma a que estes possam ser reorganizados na forma de um quadrado?

A solução vai ser apresentada passo a passo.

I- Qualquer polígono pode ser visto como constituído por triângulos.



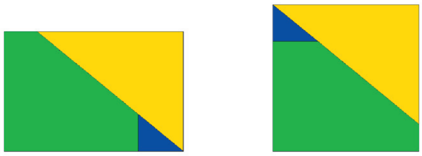
II- Todos os triângulos podem ser transformados em rectângulos, usando cortes de tesoura.

Traçando uma paralela à base que contenha os pontos médios dos outros, a construção fica evidente (escolhemos para base um lado relativamente ao qual a altura do triângulo está dentro deste).

III- Qualquer rectângulo pode ser transformado num quadrado.

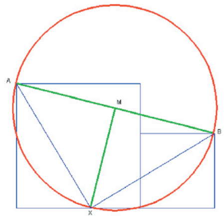
Se os lados do rectângulo forem a e b, o quadrado vai ter lado $\sqrt{(ab)}$.

Isto torna evidente onde marcar os pontos de separação nos lados maiores do rectângulo. (Supomos $a < b < 4a$, caso contrário partimos o rectângulo ao meio e empilhamos as duas peças o número de vezes necessário).

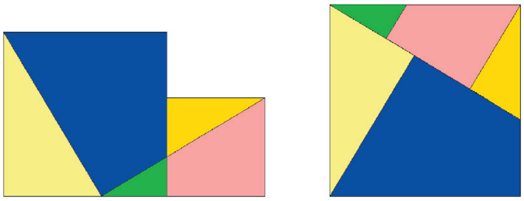


IV- Para cada par de quadrados temos uma construção que nos permite formar um quadrado com a área dos dois juntos. Propomos aos leitores a verificação da validade do processo. A ideia chave consiste na escolha do ponto na base que vai definir a separação dos pedaços.

Esta construção prévia permite evidenciar que tal ponto está numa circunferência de que o segmento que une os vértices dos quadrados originais é diâmetro.



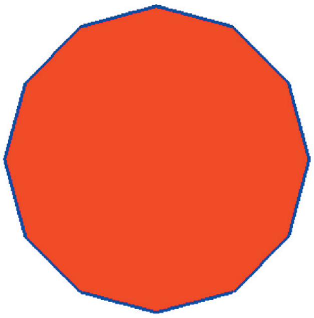
Agora basta cortar, colorir e reagrupar...



O processo está terminado: dado um polígono, começamos por dividi-lo em triângulos, cada um destes transformamos num rectângulo; cada rectângulo num com proporções aceitáveis (lado maior mais curto que quatro vezes o menor) e, finalmente, cada par de quadrados dá origem a um só quadrado.

Claro que este processo, se bem que infalível, usa decomposições em muitas peças.

Qual será o menor número de peças em que é necessário cortar o dodecágono regular de forma a que estas se reordenem na forma de um quadrado?



Nota: A solução do problema do último número pode ser encontrada em
`http://ludicum.org/MR/probl`

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu