

Gavetas e Bananas

Tirar conclusões numéricas a partir de alguns dados é arte que apela a recursos variados: às vezes alguns teoremas resolvem tudo, mas nem sempre... acontece ter de se recorrer a aproximações mais directas, arregaçar as mangas e... fazer contas!

O *Princípio das Gavetas* permite tirar algumas conclusões surpreendentes. Uma forma de o enunciar é a seguinte: se distribuímos $n+1$ objectos por n gavetas, então pelo menos uma gaveta fica com mais do que um objecto. Dirichlet utilizou este princípio numa demonstração sobre aproximações por racionais dos irracionais. Trata-se de um resultado matematicamente útil, mas dois exemplos recreativos vêm a calhar: em cada cinco cartas de jogar há pelo menos duas do mesmo naipe;



em Lisboa há pelo menos duas pessoas com o mesmo número de cabelos (estima-se que há um milhão de pessoas na capital e que ninguém tem mais do que 600 mil cabelos).



Deixemos um desafio aos leitores: Seja $f(x)$ um polinómio de coeficientes inteiros, de qualquer grau. Suponha que para três valores inteiros a , b e c se tem $f(a)=f(b)=f(c)=2$. Prove que para nenhum valor inteiro d se tem $f(d)=3$.

Às vezes não recorremos a métodos gerais para atacar problemas de contagem. Vejamos um exemplo clássico, em que uma abordagem directa basta. Há uma pilha de bananas e três macacos. O primeiro deita fora uma banana e come um terço das restantes. O segundo, mais tarde, deita uma banana fora e come um terço das que encontrou. O mesmo faz o terceiro. Sobraram duas bananas no fim. Quantas bananas havia no início? Bom, o terceiro macaco encontrou por certo quatro bananas. O segundo, para deixar quatro, é porque encontrou sete ($7-1=6$, $6-6/3=4$). A pilha original deveria conter portanto dez bananas.



Propomos mais duas questões para os leitores. A primeira é semelhante à anterior, mas há cinco macacos envolvidos. Cada um deita fora uma banana e come um quinto das restantes. Pergunta-se: qual é o menor número possível de bananas restantes após o quinto macaco se alimentar?

A segunda: 1600 bananas são distribuídas por 100 macacos. Mostre que pelo menos quatro macacos receberam o mesmo número de bananas.

Nota sobre o problema do número anterior. Como o nosso leitor Carlos Gomes, da Escola Secundária/3 Amarante, notou $P(1) = 14$ dá a soma dos coeficientes. O segundo argumento deve ser maior do que este valor. No exemplo foi 17. Quando escrito $P(17)$ em base 17 os coeficientes tornam-se aparentes... \square