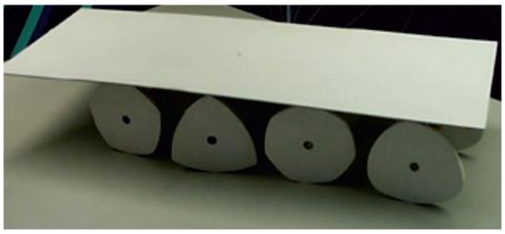
No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu *site* (*www.atractor.pt*). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

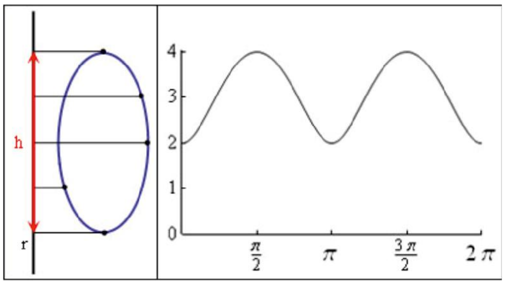
# À volta da roda

Quem me dera que a minha vida fosse um carro de bois/Que vem a chiar, manhãzinha cedo, pela estrada,/E que para de onde veio volta depois/Quase à noitinha pela mesma estrada./Eu não tinha que ter esperanças – tinha só que ter rodas...

Alberto Caeiro

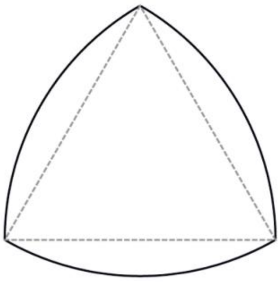
Num veículo de quatro rodas circulares, cada par delas está unido por um eixo que passa pelos centros das rodas. O formato da roda garante que todos os pontos do seu bordo estão à mesma distância do seu centro, pelo que o eixo se desloca sem oscilações. Mas, se pretendermos transportar um objecto pesado, o sistema de rodas unidas por um eixo pode não ser suficientemente robusto e, por isso, é frequente utilizarem-se rolamentos: os objectos são transportados numa plataforma que rola sobre cilindros de igual secção. Também deste modo o transporte decorre sem oscilações, mas agora a propriedade responsável por este movimento suave é o facto de a circunferência ter *largura constante*.





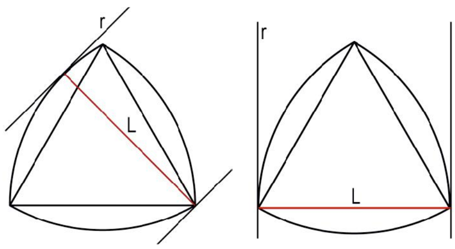

O que significa isto? Dada uma curva plana e fechada C, a *largura de C numa direcção fixada r* é o comprimento do segmento de recta que se obtém projectando em *r* cada ponto de *C* perpendicularmente à recta *r*. Diz-se que *a largura da curva é constante* se esse comprimento for o mesmo para todas as direcções do plano.

Por exemplo, uma circunferência de diâmetro *d* tem largura constante *d*. Mas esta não é uma propriedade que a caracterize, pois há infinitas outras curvas que a satisfazem. A mais simples é o *triângulo de Reuleaux*, que se obtém, a partir de um triângulo equilátero de lado *L*, se desenharmos três arcos de circunferência com raio *L* e centro em cada um dos vértices do triângulo. Verifiquemos que a curva assim obtida tem largura constante *L*.

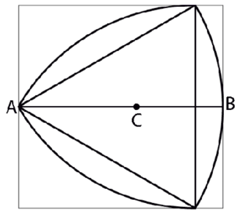


Uma recta suporte de uma curva é uma linha que tem, pelo menos, um ponto de intersecção com a curva e tal que esta fica inteiramente de um dos lados da recta. Note-se que uma recta suporte pode não ser uma recta tangente e uma recta tangente não ser uma recta suporte; e que uma curva fechada tem exactamente duas rectas suporte em cada direcção: elas podem ser encontradas colocando a curva entre duas rectas paralelas a essa direcção e deslizando-as, mantendo o paralelismo, até tocarem a curva.

Voltemos ao triângulo de Reuleaux. Consideremos uma direcção e o par de rectas suporte do triângulo de Reuleaux nessa direcção. Se uma destas rectas é tangente a um ponto interior a um dos arcos de circunferência, traçado com centro num vértice, então a outra recta suporte passa por esse vértice e a distância entre elas é o raio da circunferência, $L$. Se ambas as rectas suporte intersectam a curva em vértices, então elas são tangentes a extremos de arcos de circunferência distintos e a distância entre as duas rectas suporte também é $L$. Em ambos os casos, a largura da curva na direcção perpendicular à das rectas suporte é o comprimento $L$ do lado do triângulo equilátero que originou o de Reuleaux.




Se agora considerarmos duas direcções perpendiculares e o par de rectas suporte em cada direcção, elas formam um quadrado onde o triângulo de Reuleaux pode ser rodado sem perder contacto com qualquer dos lados do quadrado. (Esta propriedade é válida para todas as curvas de largura constante e, reciprocamente, se ela é satisfeita, então a curva tem largura constante.) Mas, ao contrário da circunferência, durante este movimento o centro geométrico do triângulo de Reuleaux não fica fixo, porque não está a igual distância de pares de rectas suporte paralelas.

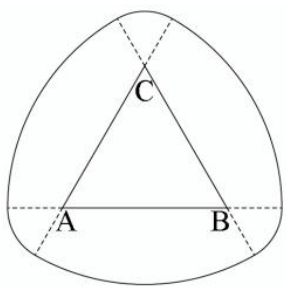



$$|AC| = \frac{\sqrt{3}}{3}L$$

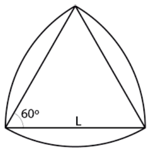
$$|BC| = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)L$$

Uma construção análoga a esta desenha polígonos de Reuleaux com um número ímpar de lados que são arcos de circunferência; e, permitindo arcos de raios distintos, podemos obter polígonos com um número par de lados. Contudo, existem outros processos de construir curvas de largura constante sem recorrer a arcos de circunferência [1].


Na imagem em cima estão moedas cujos bordos são curvas de largura constante com os cantos arredondados. Tal arredondamento pode obter-se por processo análogo ao que descreveremos para o triângulo de Reuleaux. Depois de se desenhar um triângulo equilátero [$ABC$], de lado $L$, prolongam-se os seus lados e, com centro em cada um dos vértices, traçam-se arcos de circunferência de raio $r$ (arbitrário) compreendidos entre os prolongamentos dos lados do triângulo. Em seguida, com centro nos vértices, traçam-se arcos de raio $L+r$ a unir estes pequenos arcos.



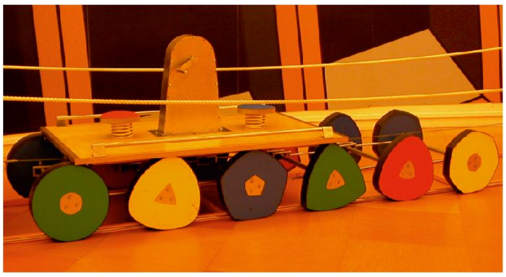
As curvas de largura constante satisfazem várias propriedades da circunferência e partilham algum do seu protagonismo. Por exemplo, todas as curvas com largura constante $L$ são convexas e têm igual perímetro [2] (o da circunferência de diâmetro $L$, isto é, $\pi L$). Para qualquer direcção, cada uma das duas rectas suporte intersecta a curva num só ponto, sendo o segmento que une estes dois pontos de contacto perpendicular às rectas suporte [1]. Além disso, sabemos que, entre todas as curvas de largura constante $L$ – que possuem, portanto, o mesmo perímetro –, a que engloba maior área é a circunferência [3]; a que delimita menor área é o triângulo de Reuleaux [4].



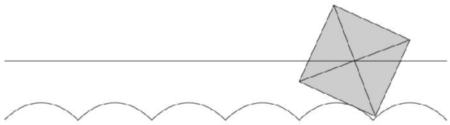

$$\textit{Perímetro} = 3\left(\frac{\pi}{3}L\right) = \pi L$$

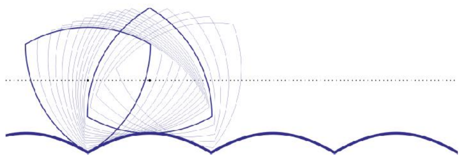
$$\textit{Área} = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)L^2$$

Na exposição Matemática Viva há um carrinho com rodas exóticas cujos bordos são várias curvas de largura constante (de valor igual para todas elas). O utilizador, que se encontra sobre uma tábua, ao dar à manivela, desliza sem oscilações numa estrada plana. Podemos agora perguntar qual a forma da estrada adequada a uma roda sem largura constante. Pretende-se que, durante o movimento, a roda e a estrada se mantenham em contacto, que o comprimento percorrido no bordo da roda seja igual ao descrito sobre a estrada e, além disso, que o centro geométrico da roda se desloque na horizontal (sem oscilações).

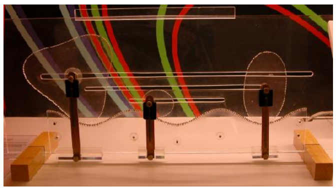


Suponhamos, por exemplo, que usamos rodas quadradas. Como deverá ser a estrada, para que alguém que se desloque num carro apoiado em eixos unindo rodas quadradas tenha um movimento horizontal (sem andar aos altos e baixos)? Pode provar-se [5] que uma tal estrada é feita de arcos de catenária invertidos.





Entrada perfeita para o triângulo de Reuleaux



Na exposição Matemática Viva está também patente um módulo em que três rodas de formatos distintos emparelham com uma mesma estrada, perfeita para as três rodas. M

**Referências:**
[1]**Rademacher, Toeplitz** "The Enjoyment of Mathematics", Princeton University Press (1970)
[2]**Honsberger**, "Ingenuity in Mathematics", MAA(1970)
[3]**Niven**, "Maxima and Minima without Calculus", MAA, Dolciani Mathematical Expositions 6 (1981)
[4]**Bonnesen, Fenchel**, "Theory of Convex Bodies", BCS Associates (1987)
[5]**Hall, Wagon**, "Roads and Wheels", *Mathematics Magazine*, vol. 65, nº5, 283-301 (1992)