NA LINHA DE FRENTE

Fabio Chalub
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

ABELHAS VIAJANTES

Conhecem o Manuel? Todos os dias acorda à mesma hora, veste-se, compra o jornal na esquina, vai ao café tomar o pequeno-almoço e chega à paragem de autocarro um minuto antes da hora certa. Depois apanha o metro, e outro autocarro, sempre minimizando o tempo de espera, e chega ao trabalho a tempo de ter a sua pontualidade elogiada pelo chefe. Um dia... o café fecha e ele tem de reorganizar toda a sua vida. Como é que ele vai fazer: começa do princípio? Ou modifica ligeiramente a sua rotina?

Figura 1: Rota óptima que visita as 15 maiores cidades da Alemanha.

O problema do caixeiro-viajante é um dos desafios clássicos da matemática. Tendo de visitar um certo número de cidades, um vendedor deseja passar apenas uma vez em cada e com a menor rota possível. Como encontrar o caminho óptimo? A dificuldade de resolver esta questão reside na enorme quantidade de maneiras de visitar todas as cidades. Desta forma, a ideia ingénua de calcular as distâncias para todos os percursos possíveis e verificar qual deles é o menor, apesar de formalmente correcta, é impraticável. Para apenas 15 cidades (como na figura 1), o número de possibilidades é da ordem de 40 mil milhões. Analisando 1000 possibilidades por segundo, um computador demoraria cerca de dois anos a obter a solução óptima. O que dizer então de visitar 25.000 cidades, como na figura 2?

O número de possibilidades pode ser facilmente obtido: fixamos uma primeira cidade qualquer e definimos apenas a ordem em que as outras $N-1$ localidades hão-de ser visitadas; por fim, dividimos por 2, pois a ordem exacta da viagem (numa ou noutra direcção) não influencia a distância. O resultado é o astronómico número de $N-1$ factorial dividido por 2.

Se para nós é tão difícil assim resolver este problema, o que dizer de simples abelhinhas? Ora, o dia-a-dia das nossas queridas melíferas consiste em visitar sucessivamente várias flores em busca de alimento, carregando pólen de um lado

Figura 2: Rota quase óptima para 25.000 cidades nos EUA. O seu comprimento excede a rota óptima em menos de 0.01%. Figura gentilmente cedida por Bill Cook. Veja http://www.tsp.gatech.edu/

para o outro. As suas jornadas não são simples passeios: quem as fizer de forma mais eficiente tem enormes vantagens evolutivas. Assim, as abelhas devem aprender rapidamente onde estão as melhores fontes de recursos, qual o horário das novas fornadas e desta forma optimizar o seu percurso. Por outras palavras, a evolução deve tê-las dotado de uma forma natural de solucionar o problema do caixeiro-viajante.

Para testar esta ideia, Lihoreay, Chittka e Raine, a trabalharem no Reino Unido, desenharam uma experiência, colocando desafios a vários abelhões de nome científico *Bombus terrestris* (um parente próximo da abelha comum produtora de mel, muito comum em Portugal) [1]. A tarefa consistia em visitar um pequeno conjunto de flores artificiais (o fornecimento de nutriente – sacarose – era controlado de forma a não haver paragens preferidas) que lhes eram apresentadas aos poucos. Inicialmente a configuração tinha apenas 2 pontos (o ponto de partida e a única flor); paulatinamente, eram apresentadas novas flores e as abelhas que apenas acrescentassem mais uma paragem na sua jornada tinham um caminho não optimizado; para o obter era preciso repensar o problema do início, e não fazer pequenas adaptações. Aos poucos, elas trocavam a ordem de visitação de forma que ao fim de apenas algumas horas de treino já tinham encontrado a rota óptima. Veja a figura 3.

Quando submetidas à mesma experiência no dia seguinte, conseguiam encontrar a rota óptima em significativamente menos tempo, mostrando que de alguma forma este caminho mais eficiente ficou retido na sua memória (as flores artificiais eram constantemente trocadas e higienizadas de forma a que fosse impossível as abelhas deixarem marcadores químicos).

Curiosamente, cada abelha, ao encontrar a rota óptima, não se fixava nesta, constantemente experimentando novos caminhos. Isto leva-nos de volta à discussão inicial, ou seja, como resolver o problema do caixeiro-viajante. Este é omnipresente: aparece em planeamento de tráfego, logística e redes de telecomunicações, por exemplo, não permitindo que nos demos ao luxo de ignorar o facto de que uma solução é necessária. Não há como obter, de forma prática, a sua solução óptima. Mas podemos desenvolver algoritmos que nos forneçam soluções quase óptimas.

O matemático Austríaco Karl Menger foi o primeiro a verificar, numa série de exemplos, que um dos algoritmos aproximados mais populares (o de ir sempre para o vizinho mais próximo) não apenas não era óptimo mas, numa série de situações típicas fornecia uma resposta muito ruim (ou seja, muito maior do que a solução óptima). Outra possibilidade

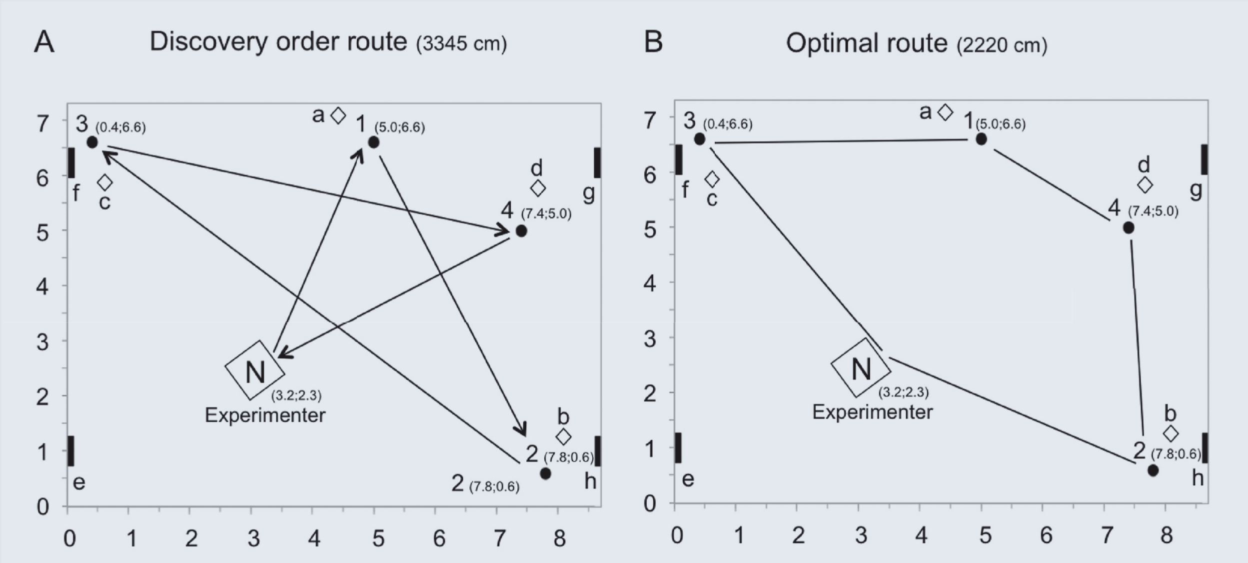

Figura 3: À esquerda vemos a ordem em que as cores artificiais eram descobertas pelas abelhas. À direita, a rota óptima, encontrada depois de algum tempo. (Figura gentilmente pelos autores do artigo [1].)

é escolher uma rota qualquer e depois procurar séries de pequenas modicações que sejam capazes de diminuir a distância viajada. Usado com cuidado, é um bom ponto de partida para algoritmos mais sofisticados, como o popular *"simulated annealing"*, com origens na física estatística.

Com as maiores capacidades computacionais actualmente disponíveis e usando muitos truques de simetria, foi possível a um grupo na Georgia Tech, E.U.A., resolver a um problema com quase 34 mil cidades. Recomenda-se o site do grupo, *http://www.tsp.gatech.edu/*, para quem quiser sentir-se como uma abelha num laboratório. Além disto é possível concorrer a um prémio de 100 dólares (não o faça pelo dinheiro!). O problema do caixeiro-viajante, no entanto, já foi resolvido, com soluções aproximadas em 1% do seu valor óptimo, para algumas dezenas de milhares de pontos de visitação. Resolver este desafio foi necessário para o desenho de *microchips*.

REFERÊNCIAS

[1] Mathieu Lihoreau, Lars Chittka & Nigel E. Raine (2010), "Travel Optimization by Foraging Bumblebees Through Re-adjustments of Traplines After Discovery of New Feeding Locations". American Naturalist 176: pp. 744-757.