Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

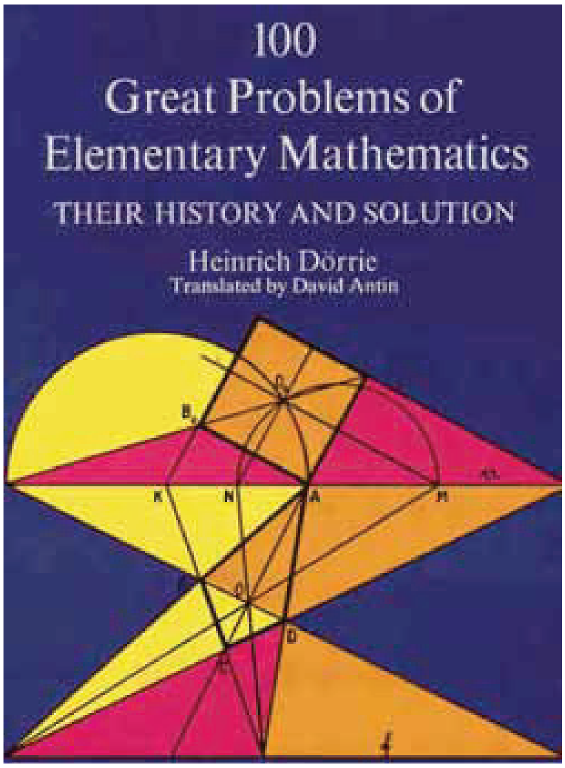
UMA **DESIGUALDADE FUNDAMENTAL**

Caro Leitor,
Numa altura em que muitos acreditam que o conhecimento está na *nuvem* e que o ruído e as informações contraditórias imperam, pensamos ser fundamental a matematização na sociedade.

A Matemática é uma exploração de certas estruturas omnipresentes e mais ou menos complexas que se nos apresentam e que admitem uma análise racional, manipulável mediante símbolos, colocando nas nossas mãos um certo domínio da realidade. A nossa mente necessita de interpretar racionalmente, o melhor que lhe for possível, as realidades e os factos. Disto se nutre o matemático no seu trabalho diário.

Ao nos sentirmos, como matemáticos, próximos dos nossos antecessores (o que acontece, acreditamos nós, mais do que com qualquer outra ciência), temos a responsabilidade de apresentar a matemática aos mais jovens, para além das técnicas, mostrando-lhes a sua história, incentivando o conhecimento e a leitura de obras fundamentais, e explicando-lhes a responsabilidade e a importância que implica o saber matemática na sociedade e no tempo em que vivemos.

Não nos podemos esquecer que há uma ligação estreita entre as necessidades educativas e a conveniência em dialogar com a sociedade, enculturando-a em assuntos de matemática. Numa altura em que muitos acreditam que o conhecimento está na *nuvem* e em que o ruído e as informações contraditórias imperam, pensamos ser fundamental a matematização da sociedade.



100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solutions, Dover, 1965.

Neste livro inspirador, Heinrich Dörrie recolhe problemas célebres de matemática elementar, analisando a sua origem e, acima de tudo, apresentando a sua solução de forma clara e compreensiva.

A restrição a problemas de matemática elementar foi considerada, por Dö rrie, aconselhável tendo em vistaos leitores que não têm o tempo nem a oportunidade de se familiarizar com os detalhes de matemática superior.

Desta forma, é possível dar uma ideia da incrível variedade de métodos, técnicas e pensamentos matemáticos, fundamentais a quem queira iniciar-se nesta ciência. Neste livro encontramos pérolas de arte matemática da autoria de Cauchy, Euler, Gauss, Pedro Nunes, Steiner e tantos outros.

Um dos propósitos de Dörrie, com este livro, é o de cativar jovens para o estudo desta ciência tão perfeita, a matemática.

Ao apresentar alguns dos problemas reunidos no livro queremos, imbuídos do espírito do seu autor, popularizar o interesse e o prazer no pensamento matemático, que é uma das ideias-chave do Projecto Delfos.

O tema que passamos a expor serviu de base a uma sessão para alunos do Projecto Delfos designada "O Oráculo", e nele aparecem números, funções, extremos de funções. . .

Teorema da média de Cauchy. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi um dos maiores matemáticos franceses, que em 1821 no seu *Cours d'Analyse* apresentou o teorema sobre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que será, como veremos, o ponto de partida para o estudo que aqui vamos apresentar.

A prova do teorema que a seguir daremos baseia-se na solução do *problema* fundamental: *Quando é que o produto de* n *números reais positivos de soma constante atinge o seu valor máximo?*

Consideremos n números a, b, c, . . ., de soma constante K, e de produto P. Por experimentação podemos inferir que o produto P atinge o seu valor máximo quando os números a, b, c, . . . possuem o mesmo valor $M = K/n$.

Para determinar a precisão desta hipótese, usamos o **Teorema Auxiliar:** *Dados dois pares de números de igual soma, o que possui o maior produto é aquele cujos números exibem a menor diferença.*

De facto, considerando os pares de números reais (X,Y) e (x,y), com $X + Y = x + y$, o teorema auxiliar segue a partir das identidades $4XY = (X+Y)^2 - (X-Y)^2$ e $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$.

Por aplicação reiterada do teorema auxiliar, obtemos que $P \leq M^n$, tendo-se igualdade se, e somente se,

$$a = b = c = \cdots = M/n.$$

Podemos então enunciar o seguinte **Teorema:** *O produto de* n *números reais positivos cuja soma é constante atinge o seu valor máximo, quando os números são todos iguais.*

Extraindo a raiz n-ésima na última desigualdade entre P e M, obtemos o *teorema* da média aritmética e geométrica, conhecido como **desigualdade de Cauchy**: *Sejam* a, b, c, . . ., n *números reais positivos, então*

$$\sqrt[n]{a\,b\,c\cdots} \leq \frac{a+b+c+\cdots}{n}, \tag{1}$$

tendo-se igualdade somente quando, $a = b = c = \cdots$.

Este teorema de Cauchy leva-nos diretamente a um **problema extremal análogo**: *A soma de* n *números positivos cujo produto é constante atinge o seu valor mínimo quando os números são todos iguais.*

De facto, denotando estes n números por x, y, z, . . ., o seu produto por k, a função soma por s, e a raiz de índice n de k por m, obtemos, tendo em atenção, a desigualdade de Cauchy, $s \geq n\,m$, com igualdade somente quando $x = y = z = \cdots$.

Desigualdade fundamental. A desigualdade de Cauchy leva-nos também a uma nova desigualdade,

$$\sqrt[m]{a^n} \leq 1 + n(a-1)/m\,, \tag{2}$$

válida para todo os inteiros positivos n, m com $n \leq m$ e todo o número real positivo a, com igualdade somente quando $a = 1$.

De facto, basta considerar a desigualdade (1) para o conjunto de m números reais positivos constituído por, n de valor a e $m - n$ de valor 1.

A desigualdade (2) pode ser estendida da seguinte forma,

$$x^\varepsilon \leq 1 + \varepsilon(x-1),\ \varepsilon \in]0,1[\,,\ x \in]0,+\infty[\,, \tag{3}$$

com igualdade somente se, x=1.

Número de Euler, e. O número e foi introduzido por Leonhard Euler (1707-1783) em meados do século XVIII. À primeira vista a sua definição pode parecer misteriosa, pois surge como solução do *problema* da existência de limite quando $x \to +\infty$ das funções definidas em $\mathbb{R}^+$ com expressão analítica

$$\varphi(x) = (1+1/x)^x \text{ e } \Phi(x) = (1+1/x)^{x+1}.$$

Partindo da desigualdade (3), vamos conseguir analisar este problema. De facto, sejam a, b dois números reais positivos com $a > b$. Tomando $x = 1+1/b$ e $\varepsilon = b/a$ em (3), obtemos

$$(1+1/b)^b < (1+1/a)^a,$$

e portando φ é uma função crescente. Da mesma forma se prova que Φ é decrescente, para tal basta considerar a desigualdade (3) com $x = 1 - 1/(b+1)$ e $\varepsilon = (b+1)/(a+1)$.

Assim, para $X > x$, e como $\Phi(x) = (1+1/x)\,\varphi(x)$, temos que $\varphi(x) < \varphi(X) < \Phi(X)$ e $\varphi(X) < \Phi(X) < \Phi(x)$.

Considere-se agora dois pontos, p e P em $\mathbb{R}^+$ que se situam à distância $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$ da origem no momento t, e começam o seu movimento no instante t=1. O ponto p começa em $\varphi(1)\ =2$ e desloca-se continuamente para a direita, e o ponto P, que começa em $\Phi(1) = 4$, desloca-se continuamente para a esquerda.

A distância entre os pontos p, P é dada por

$$d = \Phi(t) - \varphi(t) = \varphi(t)/t$$

e, portanto, $0 < d < 4/t$, logo o limte quando $t \to +\infty$ de d é 0.

Agora, como φ é uma função monótona e limitada, inferiormente por $\varphi(1) = 2$ e superiormente por $\Phi(1) = 4$, temos que existe o limite quando $t \to +\infty$ de $\varphi(t)$. Da mesma forma concluímos que existe o limite quando $t \to +\infty$ de $\Phi(t)$. Das considerações anteriores concluimos que estes limites coincidem. O valor comum destes limites designamos *número de Euler, e.*

Função exponencial e uma desigualdade exponencial. Acabámos de ver que o número de Euler, e, é tal que

$$(1+1/x)^x < e < (1+1/x)^{x+1},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Tomando $x = 10^6$, obtemos $e = 2{,}71828\ldots$

Da primeira destas desigualdades, $(1+1/x)^x < e$, tomando $x = 1/P$, onde P é um qualquer número real positivo, obtemos

$$e^P > 1+P\,,\ P \in \mathbb{R}^+\,.$$

Da segunda desigualdade, substituindo $x+1$ por $-1/n$, i.e. $1+1/x = 1/(1+n)$, onde n é um qualquer número real em $[-1,0[$, obtemos

$$e^n > 1+n\,,\ n \in [-1,0[\,.$$

Tomando na segunda desigualdade $x+1 = -1/N$ com N um qualquer número real em $]-\infty,-1[$, obtemos também $e^N\ > 1+N$ pois $1+N < 0$.

Em conclusão, temos a seguinte desigualdade exponencial

$$e^x \geq 1+x,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

tendo-se igualdade somente quando, $x = 0$.

Sejam agora $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}^+$ tais que $1 \pm x/n > 0$. Tendo em atenção a desigualdade (4) temos

$$e^{x/n} > 1+x/n \text{ e } e^{-x/n} > 1-x/n\,.$$

Da primeira desigualdade, obtemos $e^x > (1+x/n)^n$ e da segunda, obtemos, depois de multiplicar por, $1+x/n$, $(1+x/n)^n\,e^{-x} > (1-(x/n)^2)^n$.

Agora da desigualdade (3), temos que

$$(1-(x/n)^2)^n > 1 - x^2/n$$

e, portanto, a segunda desigualdade pode escrever- se como

$$(1+x/n)^n > (1-x^2/n)\,e^x,$$

que combinada com a primeira, nos dá

$$(1-x^2/n)\,e^x < (1+x/n)^n < e^x\,.$$

Concluimos assim que o limite quando $n \to +\infty$ de $(1+x/n)^n$ é e^x, $x \in \mathbb{R}$.

Problema de Steiner sobre o número de Euler. O seguinte problema foi proposto por Jacob Steiner (1796-1863) no *Crelle's Journal*, vol. XL: *Determinar o máximo da função* $\sqrt[x]{x}$ *em* $\mathbb{R}^+$.

Da desigualdade para funções exponenciais, obtemos $e^{(x-e)/e} \geq 1+(x-e)/e = x/e$, tendo-se igualdade somente quando, $x = e$. Esta desigualdade lê-se, depois de algumas simplificações, como $\sqrt[e]{e} \geq \sqrt[x]{x}$.

Assim, o problema de Steiner tem como resposta o número de Euler.