António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

MATEMÁTICA E MALABARISMO

O malabarismo é uma arte que poucas pessoas associariam à matemática. Há, no entanto, entre estas duas atividades humanas muito mais relações do que se possa suspeitar à primeira vista. Enquanto o malabarismo oferece à matemática problemas combinatórios interessantes, a matemática deu já ideias para novos truques, ajudando a estabelecer uma classificação profícua dos padrões malabares e a combinar movimentos de formas originais.

A mais antiga evidência de atividades malabares remonta ao Antigo Egito, a uma pintura contida num túmulo de um príncipe egípcio desconhecido. Data do Império Médio, que decorreu do início da 11ª dinastia ao fim da 13ª dinastia, ou seja, entre os anos 2055 A.E.C.[1] e 1650 A.E.C., período do qual, curiosamente, datam também alguns dos textos matemáticos mais antigos que se conhecem, como o chamado papiro de Moscovo e o documento do qual o papiro de Rhind foi copiado. Esta coincidência cronológica é certamente apenas circunstancial.

Também talvez não seja mais do que uma coincidência que um dos grandes matemáticos persas do séc. X, Abū Sahl al-Qūhī[2] tenha sido um famoso malabarista, conhecido pelas suas manipulações de garrafas de vidro no mercado de Baghdad, antes de se dedicar à matemática[3]. Mais recentemente, há alguns exemplos de notáveis matemáticos com paixões malabares, dentre os quais se destacam:

Claude Shannon (1916–2001), que deu contribuições decisivas para o desenvolvimento das comunicações eletrónicas e é considerado o fundador da teoria da informação,

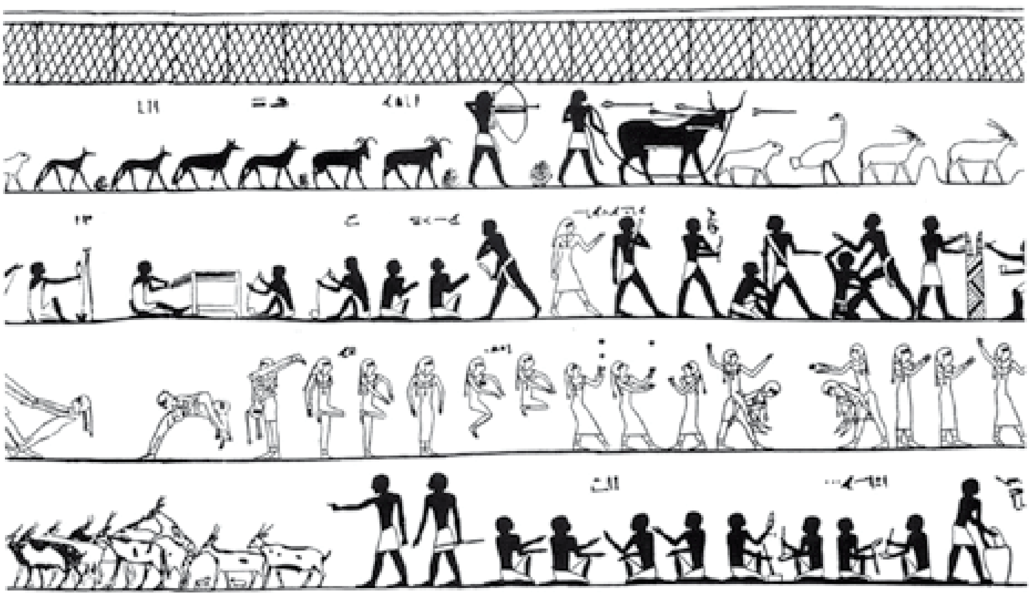

Figura 1: Pintura tumular egípcia com cerca de 4000 anos, mostrando mulheres fazendo malabarismo

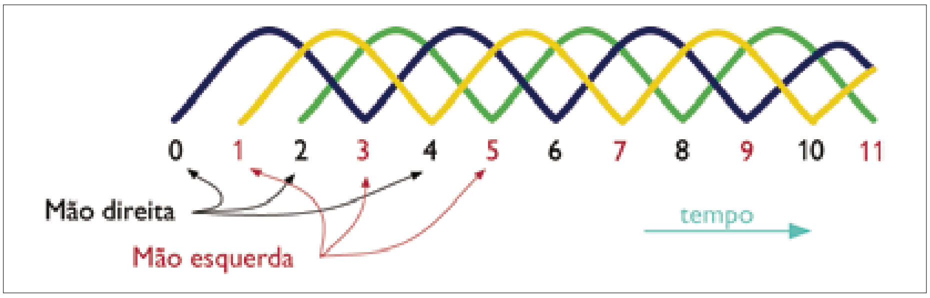

Figura 2: O movimento 33333333...

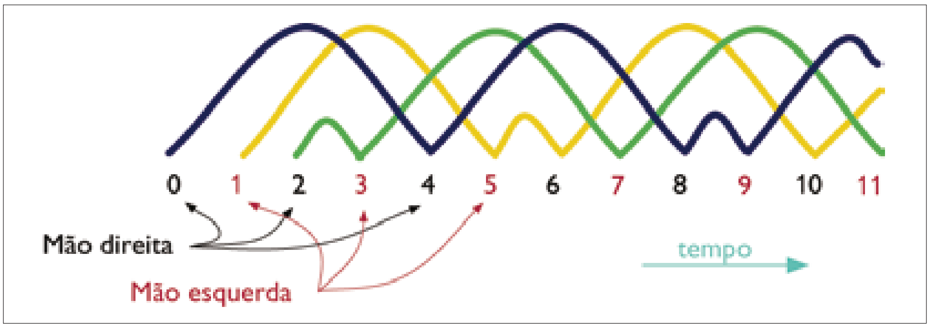

Figura 3: O movimento 441441...

tinha por passatempos tocar clarinete, jogar xadrez, andar de monociclo[4] e o malabarismo; Ronald Graham (n. 1935), um dos principais arquitetos do desenvolvimento da matemática discreta no séc. XX, e que foi presidente da Sociedade Americana de Matemática de 1993 a 1994, foi também presidente da International Jugglers' Association em 1972; David Eisenbud (n. 1947), que foi diretor do Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), de 1997 a 2007, e presidente da Sociedade Americana de Matemática, de 2003 a 2005, tem por passatempos a música (flauta e canto) e o malabarismo; Allen Knutson[5] (n. 1969), galardoado com o prémio Levi L. Conant em 2005, juntamente com Terence Tao, e atualmente no departamento de Matemática da Universidade de Cornell, foi detentor do recorde mundial de 12 bolas em malabarismo a "quatro mãos", isto é, envolvendo duas pessoas, de 1990 a 1995 (o atual recorde é 13).

O que talvez já não seja uma coincidência é que na década de 1980/90 vários malabaristas com fortes pendores matemáticos inventaram uma notação para descrever certos movimentos malabares que revolucionou esta arte multimilenar. Apelidada de *site-swap*, ou notação transposicional, é um instrumento extremamente útil para comunicar e descobrir novos movimentos, facilitando ainda a aprendizagem, uma vez que torna possível decompor, de um modo natural e sistemático, sequências complicadas em componentes mais acessíveis que podem ser treinadas à parte.

No caso mais simples (conhecido por *vanilla site-swap*), o único que aqui será descrito, a notação transposicional aplica-se apenas a sequências malabares que satisfazem os três requisitos seguintes:

1) os objetos são lançados alternadamente pela mão direita e pela mão esquerda;

2) no máximo um objeto é lançado a cada instante;

3) a sequência de lançamentos é periódica.

A ideia é concentrar toda a informação de um padrão malabar deste tipo, a que chamaremos *simples*, numa sequência de números que dá a sucessão das ações de cada uma das mãos, alternadamente, em que cada ação se resume a lançar ou não um objeto, dando-se apenas a indicação de quantas ações haverá desde o lançamento até à receção do objeto, sendo ambas contabilizadas. Os números de um padrão malabar são designados "alturas", uma vez que quanto maior for o número, mais tempo o objeto terá de ficar no ar antes de ser recapturado, e portanto mais alto terá de ser lançado.

Por exemplo, a figura 2 representa o padrão **3** em que cada uma das mãos lança um objeto que é apanhado pela outra mão três "tempos" à frente. A figura 3, por seu

[1] A.E.C. significa "Antes da Era Comum" — ver *http://en.wikipedia.org/wiki/Common_Era*.

[2] Mais exatamente: ابو سهل كوهي

[3] Ver Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer, 1986, p. 79.

[4] Foi mesmo um dos membros fundadores da Associação Americana de Monociclismo.

[5] Que no passado mês de julho participou na Escola de Verão do programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian.

lado, ilustra o padrão malabar **441**, em que uma das mãos (a direita, por exemplo) lança um objeto que é recapturado quatro "momentos" mais tarde, de seguida a outra mão lança um outro objeto que será também recapturado quatro "tempos" depois, após o que a primeira mão lança um terceiro objeto que é apanhado logo no momento imediatamente seguinte, e tudo se repete ciclicamente. Em ambos os esquemas, cada uma das linhas coloridas representa um objeto distinto. Para ver os movimentos correspondentes a estes padrões, consultar o *site* Juggling Lab, no endereço *http://jugglinglab.sourceforge.net*, seguindo depois o *link* Full applet.

Uma das vantagens desta notação é a de permitir obter uma relação entre diferentes padrões, como ilustrado na figura 4, onde se permutam dois lançamentos consecutivos, um de altura m e outro de altura n. Como é fácil ver, essa troca origina novos lançamentos de alturas $n+1$ e $m-1$. Isto significa, em particular, que se $\boldsymbol{XmnY}$ é um determinado padrão malabar, onde X e Y designam sequências (eventualmente vazias) de números, então $\boldsymbol{X(n+1)(m-1)Y}$ também é um padrão malabar (é daqui que vem o nome *site-swap*). Observe-se que isto define uma operação (unária) no conjunto das sequências malabares que é involutiva (ou seja, é a sua própria inversa), e que por conseguinte pode ser usada para decidir se uma dada sequência é ou não uma sequência malabar, isto é, se corresponde a um padrão malabar. Por exemplo:

56612 $\leftrightsquigarrow$ **56252** $\leftrightsquigarrow$ **56234** $\leftrightsquigarrow$ **53534** $\leftrightsquigarrow$ **44444**,

mostra que a sequência **56612** é malabar, uma vez que é fácil ver que **4** é malabar (desenhe o diagrama correspondente) e, mais, que envolve quatro objetos. Esta operação de permuta de movimentos consecutivos pode ser usada para mostrar o seguinte resultado: *o número de objetos envolvidos num padrão malabar é igual à média aritmética dos respetivos números.*

A notação trasposicional tem ainda a vantagem de permitir classificar e contar todos os padrões malabares do tipo aqui considerados. Nomeadamente, tem-se que *uma sequência de* p *números,* $n_1, n_2, \ldots, n_p$, *é um padrão malabar simples* **se e só se** *os restos dos números* $i + n_i$, *quando divididos por* p, *forem todos os números de* 0 *a* p−1. O número de sequências malabares simples com b objetos e de período p é dado por

$$\frac{1}{p}\sum_{d|p}\mu\left(\frac{p}{d}\right)\left((b+1)^d-b^d\right),$$

onde μ é a função de Möbius[6]. Por exemplo, há exatamente 12 padrões com três objetos e cujo período é 3, designadamente: **423, 441, 504, 522, 531, 621, 603, 630, 711, 720, 801, 900.**

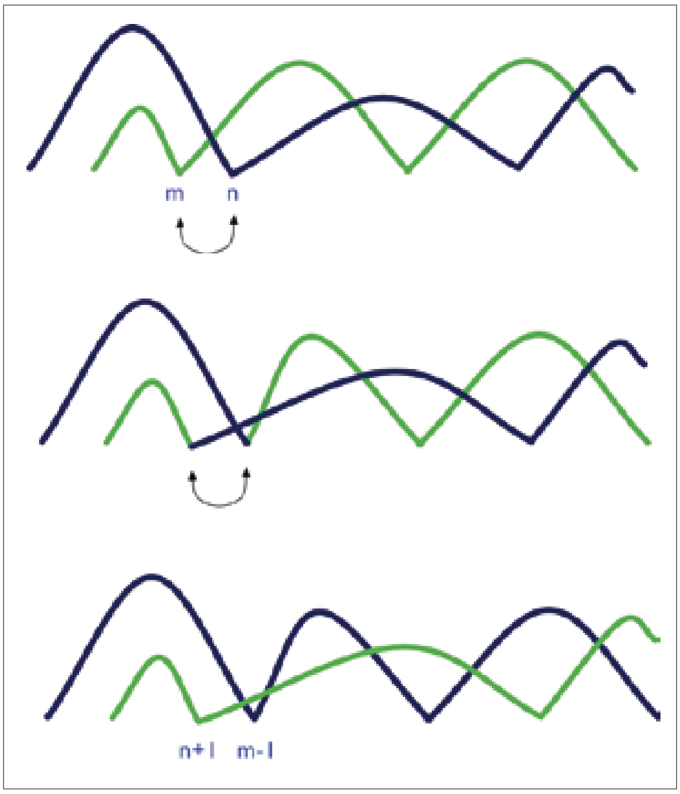

Figura 4: Permuta de dois lançamentos consecutivos

Para demonstrações destes resultados e para saber mais sobre este assunto, consultar o artigo "Juggling Drops and Descents", de Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham e Colin Wright, no *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, n.º 6 (June–July, 1994), pp. 507–519, ou o livro *The Mathematics of Juggling* de Burkard Polster (Springer, 2003). Para mais detalhes sobre malabarismo, consultar as páginas SiteSwaps, How To Write Down A Juggling Pattern: A Guide For The Perplexed, *http://juggling.org/help/siteswap/ssintro* e Juggling Information Service, *http://juggling.org.*

Recentemente, Allen Knutson, Thomas Lam e David Speyer encontraram uma aplicação do malabarismo à Geometria Algébrica. Ver "Positroid Varieties: Juggling and Geometry", disponível em *http://arxiv.org/pdf/1111.3660.pdf*. Há assim uma relação simbiótica entre a matemática e o malabarismo: enquanto a primeira fornece à segunda modos de descrever os possíveis padrões e formas de os combinar em arranjos originais, a segunda inspira construções novas e problemas interessantes a explorar. Quem diria...

[6] Ver *http://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_function.*