



APANHADOS NA REDE



ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

MATEMÁTICA E MALABARISMO

O malabarismo é uma arte que poucas pessoas associariam à matemática. Há, no entanto, entre estas duas atividades humanas muito mais relações do que se possa suspeitar à primeira vista. Enquanto o malabarismo oferece à matemática problemas combinatórios interessantes, a matemática deu já ideias para novos truques, ajudando a estabelecer uma classificação profícua dos padrões malabares e a combinar movimentos de formas originais.

A mais antiga evidência de atividades malabares remonta ao Antigo Egito, a uma pintura contida num túmulo de um príncipe egípcio desconhecido. Data do Império Médio, que decorreu do início da 11^a dinastia ao fim da 13^a dinastia, ou seja, entre os anos 2055 A.E.C.¹ e 1650 A.E.C., período do qual, curiosamente, datam também alguns dos textos matemáticos mais antigos que se conhecem, como o chamado papiro de Moscovo e o documento do qual o papiro de Rhind foi copiado. Esta coincidência cronológica é certamente apenas circunstancial.

Também talvez não seja mais do que uma coincidência que um dos grandes matemáticos persas do séc. X, Abū Sahl al-Qūhī² tenha sido um famoso malabarista, conhecido pelas suas manipulações de garrafas de vidro no mercado de Bagdad, antes de se dedicar à matemática³. Mais recentemente, há alguns exemplos de notáveis matemáticos com paixões malabares, dentre os quais se destacam:

Claude Shannon (1916–2001), que deu contribuições decisivas para o desenvolvimento das comunicações eletrónicas e é considerado o fundador da teoria da informação,

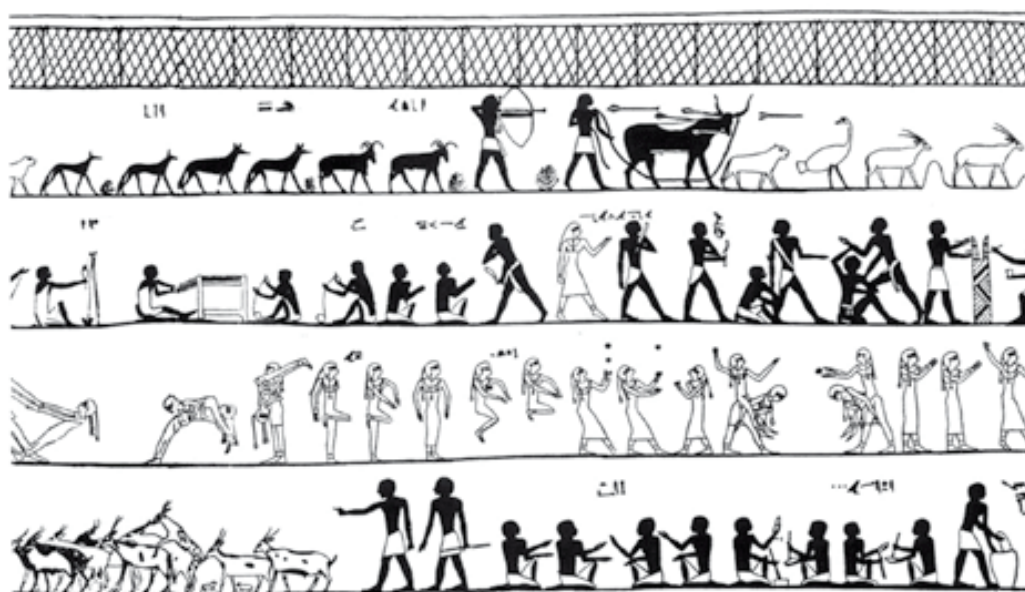


Figura 1: Pintura tumular egípcia com cerca de 4000 anos, mostrando mulheres fazendo malabarismo

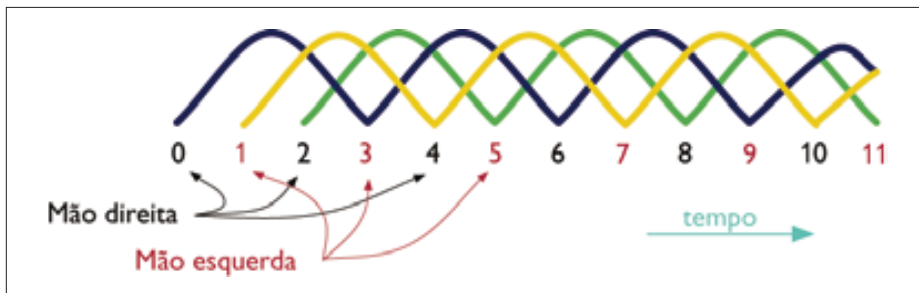


Figura 2: O movimento
33333333...

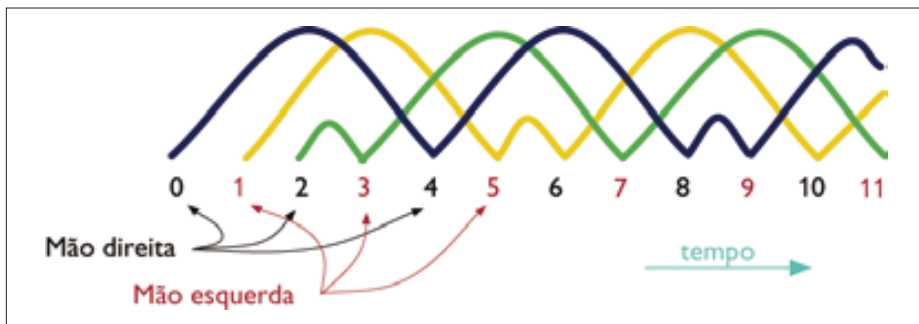


Figura 3: O movimento
441441...

tinha por passatempos tocar clarinete, jogar xadrez, andar de monociclo⁴ e o malabarismo; Ronald Graham (n. 1935), um dos principais arquitetos do desenvolvimento da matemática discreta no séc. XX, e que foi presidente da Sociedade Americana de Matemática de 1993 a 1994, foi também presidente da International Jugglers' Association em 1972; David Eisenbud (n. 1947), que foi diretor do Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), de 1997 a 2007, e presidente da Sociedade Americana de Matemática, de 2003 a 2005, tem por passatempos a música (flauta e canto) e o malabarismo; Allen Knutson⁵ (n. 1969), galardoado com o prêmio Levi L. Conant em 2005, juntamente com Terence Tao, e atualmente no departamento de Matemática da Universidade de Cornell, foi detentor do recorde mundial de 12 bolas em malabarismo a “quatro mãos”, isto é, envolvendo duas pessoas, de 1990 a 1995 (o atual recorde é 13).

O que talvez já não seja uma coincidência é que na década de 1980/90 vários malabaristas com fortes pendores matemáticos inventaram uma notação para descrever certos movimentos malabares que revolucionou esta arte mult milenar. Apelidada de *site-swap*, ou notação transposicional, é um instrumento extremamente útil para comunicar e descobrir novos movimentos, facilitando ainda a aprendizagem, uma vez que torna possível decompor, de um modo natural e sistemático, sequências complicadas em componentes mais acessíveis que podem ser treinadas à parte.

No caso mais simples (conhecido por *vanilla site-swap*), o único que aqui será descrito, a notação transposicional aplica-se apenas a sequências malabares que satisfazem os três requisitos seguintes:

- 1) os objetos são lançados alternadamente pela mão direita e pela mão esquerda;
- 2) no máximo um objeto é lançado a cada instante;
- 3) a sequência de lançamentos é periódica.

A ideia é concentrar toda a informação de um padrão malabar deste tipo, a que chamaremos *simples*, numa sequência de números que dá a sucessão das ações de cada uma das mãos, alternadamente, em que cada ação se resume a lançar ou não um objeto, dando-se apenas a indicação de quantas ações haverá desde o lançamento até à receção do objeto, sendo ambas contabilizadas. Os números de um padrão malabar são designados “alturas”, uma vez que quanto maior for o número, mais tempo o objeto terá de ficar no ar antes de ser recapturado, e portanto mais alto terá de ser lançado.

Por exemplo, a figura 2 representa o padrão 3 em que cada uma das mãos lança um objeto que é apanhado pela outra mão três “tempos” à frente. A figura 3, por seu

¹ A.E.C. significa “Antes da Era Comum” — ver http://en.wikipedia.org/wiki/Common_Era.

² Mais exatamente: أبو سهل كوهي

³ Ver Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer, 1986, p. 79.

⁴ Foi mesmo um dos membros fundadores da Associação Americana de Monociclismo.

⁵ Que no passado mês de julho participou na Escola de Verão do programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian.

lado, ilustra o padrão malabar 441, em que uma das mãos (a direita, por exemplo) lança um objeto que é recapturado quatro “momentos” mais tarde, de seguida a outra mão lança um outro objeto que será também recapturado quatro “tempos” depois, após o que a primeira mão lança um terceiro objeto que é apanhado logo no momento imediatamente seguinte, e tudo se repete ciclicamente. Em ambos os esquemas, cada uma das linhas coloridas representa um objeto distinto. Para ver os movimentos correspondentes a estes padrões, consultar o *site* Juggling Lab, no endereço <http://jugglinglab.sourceforge.net>, seguindo depois o link Full applet.

Uma das vantagens desta notação é a de permitir obter uma relação entre diferentes padrões, como ilustrado na figura 4, onde se permutam dois lançamentos consecutivos, um de altura m e outro de altura n . Como é fácil ver, essa troca origina novos lançamentos de alturas $n + 1$ e $m - 1$. Isto significa, em particular, que se $XmnY$ é um determinado padrão malabar, onde X e Y designam sequências (eventualmente vazias) de números, então $X(n + 1)(m - 1)Y$ também é um padrão malabar (é daqui que vem o nome *site-swap*). Observe-se que isto define uma operação (unária) no conjunto das sequências malabares que é involutiva (ou seja, é a sua própria inversa), e que por conseguinte pode ser usada para decidir se uma dada sequência é ou não uma sequência malabar, isto é, se corresponde a um padrão malabar. Por exemplo:

$$56612 \leftrightarrow 56252 \leftrightarrow 56234 \leftrightarrow 53534 \leftrightarrow 44444,$$

mostra que a sequência 56612 é malabar, uma vez que é fácil ver que 4 é malabar (desenhe o diagrama correspondente) e, mais, que envolve quatro objetos. Esta operação de permuta de movimentos consecutivos pode ser usada para mostrar o seguinte resultado: o número de objetos envolvidos num padrão malabar é igual à média aritmética dos respetivos números.

A notação trasposicional tem ainda a vantagem de permitir classificar e contar todos os padrões malabares do tipo aqui considerados. Nomeadamente, tem-se que uma sequência de p números, n_1, n_2, \dots, n_p , é um padrão malabar simples se e só se os restos dos números $i + n_i$, quando divididos por p , forem todos os números de 0 a $p-1$. O número de sequências malabares simples com b objetos e de período p é dado por

$$\frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) \left((b+1)^d - b^d \right),$$

onde μ é a função de Möbius⁶. Por exemplo, há exatamente 12 padrões com três objetos e cujo período é 3, designadamente: 423, 441, 504, 522, 531, 621, 603, 630, 711, 720, 801, 900.

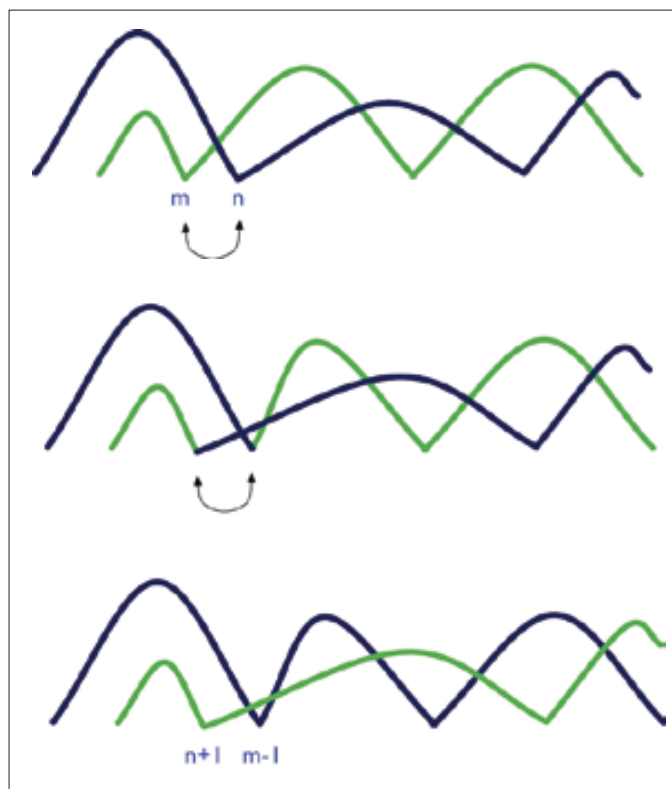


Figura 4: Permuta de dois lançamentos consecutivos

Para demonstrações destes resultados e para saber mais sobre este assunto, consultar o artigo “Juggling Drops and Descents”, de Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham e Colin Wright, no *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, n.º 6 (June–July, 1994), pp. 507–519, ou o livro *The Mathematics of Juggling* de Burkard Polster (Springer, 2003). Para mais detalhes sobre malabarismo, consultar as páginas SiteSwaps, How To Write Down A Juggling Pattern: A Guide For The Perplexed, <http://juggling.org/help/siteswap/ssintro> e Juggling Information Service, <http://juggling.org>.

Recentemente, Allen Knutson, Thomas Lam e David Speyer encontraram uma aplicação do malabarismo à Geometria Algébrica. Ver “Positroid Varieties: Juggling and Geometry”, disponível em <http://arxiv.org/pdf/1111.3660.pdf>. Há assim uma relação simbiótica entre a matemática e o malabarismo: enquanto a primeira fornece à segunda modos de descrever os possíveis padrões e formas de os combinar em arranjos originais, a segunda inspira construções novas e problemas interessantes a explorar. Quem diria...

⁶Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_function.