QUANDO FARÁ A SPM ANOS NUM DOMINGO?

ALEXANDER KOVAČEC
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

Se o leitor facilmente se irrita com indicações minimalistas de datas na forma *dd-mm-yy* que, quase invariavelmente, nos obrigam a ir à procura do correspondente dia da semana, oferecemos hoje um remédio. Uma fórmula que permite o cálculo desse dia. A fórmula permite também responder facilmente a outras questões ligadas a datas como, por exemplo, a do título.

Os nossos calendários – existe pelo menos, uma dúzia nas várias culturas – tentam algo impossível: racionalizar o irracional, como observa Ian Stewart em [S]. O *ano trópico médio* tem a duração de 365.242199... dias, sendo um dia a duração entre duas passagens do Sol pelo zénite. Na sequência deste inconveniente, já em 46 A.C., Júlio César, aconselhado pelo astrónomo alexandrino Sosígenes, introduziu os anos bissextos para repor a sincronicidade do calendário com as estações do ano. A regra então introduzida não se mostrou suficientemente exata de modo que em 1582 o Papa Gregório XIII introduziu mais uma reforma que manda que "anos que são múltiplos de 4 são bissextos, exceto quando são divisíveis por 100; tais anos são bissextos só se forem divisíveis por 400." No calendário gregoriano um ano bissexto tem o dia adicional no dia 29 de fevereiro.

Como dito, o nosso propósito é o de fundamentar uma fórmula para calcular o dia da semana a partir duma indicação *dd-mm-yy*. Esta fórmula, no essencial deixada em [NZ] como problema ao leitor, é naturalmente um pouco complexa. A matemática é elementar, mas convém ter um mínimo de notação.

Designamos por $\rho_7(x)$ ou $\rho(x)$ o resto de $x \in \mathbb{Z}$ na divisão por 7. Indicamos este resto naturalmente em {0, 1, ..., 6}. Por exemplo, $\rho(-2) = \rho(12) = 5$, sendo isto o mesmo que escrever $-2 \equiv_7 12 \equiv_7 5$, que quer dizer 'reduzir -2 e 12 módulo 7'. Da teoria dos números recordamos que $\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y)$, desde que se reduza o lado direito módulo 7. O 'sucessor módulo 7' de, por exemplo, 4 é 5, mas o de 6 é 0. A partir de agora escrevemos simplesmente '$\equiv$' em vez de '$\equiv_7$'.

Para um real r, por $\lfloor r \rfloor$ designa-se o maior inteiro $\leq r$, por $\lceil r \rceil$ o menor inteiro $\geq r$. Por exemplo, $\lfloor 2.07 \rfloor = 2 = -(-2) = -\lceil -2.07 \rceil$. Precisamos da permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

que indica $\sigma(2) = 12, \sigma(5) = 3$, etc. Finalmente definamos para $m = 1, 2, ..., 12$, $E(m) = \lfloor 2.6\,\sigma(\mathrm{m}) - 0.2 \rfloor$, e para uma propriedade P, $\chi(P) = 1$ se P for verdadeira, e 0 se for falsa. Por exemplo, $\chi(m \leq 2) = 1$ se m=1,2; mas se $m \geq 3$, então $\chi(m \leq 2) = 0$

RECEITA PARA CALCULAR O DIA DA SEMANA. Dada uma data na forma habitual *dd-mm-yy* (que vamos abreviar por $d\ m\ y$), para calcular o dia da semana associado, ponha-se s := número de séculos que cabem no ano (por exemplo, 19 se falamos de 1974), $\delta = 1$ se o ano é bissexto, e $\delta = 0$ nos outros casos. Reduza-se o inteiro

$$N = 1 + d + E(m) + \lfloor \tfrac{5y}{4} \rfloor - \lceil \tfrac{7s}{4} \rceil - (1+\delta)\chi(m \leq 2)$$

módulo 7: d $= \rho(N)$. Finalmente utilize-se a tabela

d:	0	1	2	3	4	5	6
dia:	Sab	Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex

para determinar o dia.

Papa Gregório XIII

Graças à forma simples como aqui designamos os dias, nem precisamos desta tabela. Nos cálculos práticos pode ser mais expedito usar acima o lado direito da identidade

$$\lfloor \tfrac{5y}{4} \rfloor - \lceil \tfrac{7s}{4} \rceil = y + \lfloor \tfrac{y}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{s}{4} \rfloor - 2s.$$

Provamos a validade da receita por indução. Para o início da indução podemos escolher o dia 1 de janeiro de 2013. Neste caso, $d = 1, m = 1, y = 13, s = 20$. O ano não é bissexto, por isso $\delta = 0$. Colocando estes dados na fórmula, vem

$$N = N(1,1,13,20,0) =$$
$$= 1 + 1 + \lfloor 2.6\,\sigma(1) - .2 \rfloor + 13 + \lfloor \tfrac{13}{4} \rfloor +$$
$$+ \lfloor \tfrac{20}{4} \rfloor - 2 \cdot 20 - (1+0) \cdot 1 =$$
$$= 2 + \lfloor 2.6 \cdot 11 - 0.2 \rfloor + 13 + 3 + 5 - 40 - 1 =$$
$$= 2 + \lfloor 28.4 \rfloor - 20 = 30 - 20 = 10.$$

Ora $\rho(10) = 3$, de modo que o dia 1 de janeiro de 2013 foi segundo a fórmula uma terça-feira, como de facto foi.

O passo de indução é laborioso porque as mudanças que regem o quíntuplo (d, m, y, s, δ) que serve de entrada para a fórmula são um pouco complicadas, ainda que a mudança mais comum seja dada simplesmente por

$$(d, m, y, s, \delta) \mapsto (d+1, m, y, s, \delta).$$

Parece-nos que uma forma para facilitar a discussão é condensar as numerosas regras num pseudocódigo que exibe de forma arrumada o que fazemos quando mudamos a data.

Algoritmo: 'Próxima Data'

Input: um quíntuplo admissível (d, m, y, s, δ)

Output: o quíntuplo associado ao dia seguinte.

if $m \in \{1,3,5,7,8,10\}$ then
  if $d < 30$ then $d = d+1;\ \ominus;$
  if $d = 31$ then $d = 1; m = m+1; \ominus;$
if $m \in \{4,6,9,11\}$ then
  if $d < 29$ then $d = d+1;\ \ominus;$
  if $d = 30$ then $d = 1; m = m+1; \ominus;$
if $m = 2$ then
  if $d < 28$ then $d = d+1;\ \ominus;$
  if $d = 28 \& \delta = 0$ then $d = 1; m = 3;\ \ominus;$
  if $d = 28 \& \delta = 1$ then $d = d+1;\ \ominus;$
  if $d = 29 \& \delta = 1$ then $d = 1; m = 3;\ \ominus;$
if $m = 12$ then
  if $d < 31$ then $d = d+1;\ \ominus;$
  if $d = 31$ then
    $d = 1;\ m = 1;$
    if $y < 99$ then
      $y = y+1;$
      if $4|y$ then $\delta = 1; \ominus;$ else $\delta = 0; \ominus;$
    if $y = 99$ then
      $y = 0; s = s+1;$
      if $4|s$ then $\delta = 1; \ominus;$ else $\delta = 0; \ominus;$

O algoritmo tem quatro linhas 'if m.... ...'. Estas repartem os meses 1 a 12 em quatro partes disjuntas. Os $\ominus$ que interpretamos como '*stop*' garantem que no máximo uma linha de uma das partes vai ser executada. O 'if $m \in \{1,3,...,10\}$ ...' contempla os meses janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, que têm 31 dias. Nestes meses, se o dia é $d < 30$, o dia a seguir tem número $d + 1$, pertence ao mesmo mês, e evidentemente ano, século e δ também não mudam. Se o dia é 31, o próximo dia é o dia 1 do mês seguinte. Mais nada muda. O 'if $m \in \{4,6,9,11\}$ ...' contempla de forma análoga os meses abril, junho, setembro, novembro que têm apenas 30 dias. O mês de fevereiro ($m = 2$) é mais complicado. Seja ou não o ano em consideração bissexto, se $d < 28$, d deve ser aumentado em uma unidade, o resto do quíntuplo fica igual. Se $d = 28$ e o ano não é bissexto (i.e. se $\delta = 0$), então o dia seguinte é um dia 1 e o mês sucessor é março ($m = 3$). Se o ano é bissexto, então o dia seguinte é 29 ainda com $m = 2$, mas se $d = 29$, devemos mudar para $d = 1$ e $m = 3$, enquanto o resto fica igual.

Resta o mês de dezembro. Neste caso em todos os dias com $d < 31$ devemos só aumentar d em uma unidade, e não fazer mais nada. Mas se $d = 31$, então devemos mudar para o dia 1 de janeiro ($m = 1$), e também mudar o par (y, s). Se $y < 99$, y deve ser aumentado em uma unidade. Se $y = 99$, o próximo y é 0, e o século aumenta 1.

O novo ano (obtido pela linha $y = y+1$) é por extenso igual a $100s + y$. Traduzindo as regras do Papa Gregório XIII, o ano é bissexto se for divisível por 4, a não ser que $y = 0$; neste caso é bissexto só quando $4 \mid s$. Em fórmulas lógicas podíamos mesmo definir $\delta = \chi((4|y \,\&\, \neg(y = 0)) \vee (y = 0 \,\&\, 4|s))$; mas o mais importante é que as últimas seis linhas do código traduzem as diretivas papais.

Obtida desta forma uma compreensão completa das leis que regem a mudança do trio *dd-mm-yy*, dedicamo-nos à verificação da fórmula. Seja (d, m, y, s, δ) um quíntuplo para o qual a fórmula dá uma resposta correta. Se uma das linhas que apenas contêm o comando '$d = d + 1$;' for executada, é evidente que o valor da fórmula aumenta exatamente em 1 e por isso, após aplicação de ρ, dá-nos o próximo dia da semana.

Para continuação é necessário que o leitor verifique primeiro a tabela seguinte

m:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\rho(E(m))$:	0	3	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
$\chi(m \leq 2)$:	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Por exemplo, para $m = 5$, $\sigma(5) = 3$, $E(5) = \lfloor 2.6 \cdot 3 - 0.2 \rfloor = 7$, $\rho(7) = 0$.

Note-se também a última linha da tabela. Um olhar para o 'Próximo Dia', dá que nos meses 1 e 3 até 11 apenas o valor da parte $d + E(m)$ da fórmula pode mudar. Examinemos para esses meses as mudanças de $\rho(d + E(m))$ para o mês sucessor. Temos $\rho(30) = 2, \rho(31) = 3, \rho(1) = 1$. Do mês de março para o de abril interessam os cálculos $\rho(31 + E(3)) = \rho(31) + \rho(E(3)) = 3 + 2 \equiv 5$, $\rho(1 + E(4)) = 1 + 5 \equiv 6$. Os valores para os restantes casos são calculados da mesma maneira e estão reunidos nas tabelas seguintes.

m:	1	3	5	7	8	10
$\rho(31 + E(m))$:	3	5	3	1	4	2
$\rho(1 + E(m+1))$:	4	6	4	2	5	3

m:	4	6	9	11
$\rho(30 + E(m))$:	0	5	6	4
$\rho(1 + E(m+1))$:	1	6	0	5

É pertinente que $\rho(d + E(m))$ mude em todos estes casos para o sucessor dos restos módulo 7. Decorre que o mesmo acontecerá com a nossa fórmula, i.e. com $\rho(N)$.

Vejamos agora o mês de fevereiro, $m = 2$.

As mudanças do quíntuplo ainda por examinar são a seguir acompanhadas pelas correspondentes reduções módulo 7 dos fragmentos relevantes (que não contêm y, nem s) da fórmula.

$(28, 2, y, s, 0) \to (1, 3, y, s, 0)$: Aqui observamos

$1 + 28 + E(2) - 1 \equiv 1 + 0 + 3 - 1 \equiv 3$, e

$1 + 1 + E(3) - 1 \cdot 0 \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 4$.

$(28, 2, y, s, 1) \to (29, 2, y, s, 1)$: Neste caso apenas a variável d da fórmula aumenta em 1 e, portanto, o valor da fórmula muda para o seu sucessor módulo 7.

$(29, 2, y, s, 1) \to (1, 3, y, s, 1)$:Aqui observamos

$1 + 29 + E(2) - 2 \equiv 1 + 1 + 3 - 2 \equiv 3$, e

$1 + 1 + E(3) - 2 \cdot 0 \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 4$.

Teremos então também em fevereiro sempre que $\rho(N)$ muda para o sucessor módulo 7.

Ficam por examinar as mudanças para o novo ano. As mudanças possíveis e os cálculos acompanhantes são os seguintes e os mais complicados de todo o calendário.

A parte $1 + d + E(m) - \chi(m \leq 2)$ da fórmula tem no último dia de um ano o valor $1 + 31 + E(12) - 0 \equiv 1 + 3 + 4 \equiv 1$ e no primeiro dia do ano novo o valor

$$1 + 1 + E(1) - 1 \equiv 2 + 0 - 1 \equiv 1.$$

Fica assim apenas por provar que as restantes partes da fórmula geram uma mudança para o sucessor módulo 7. Chamemos y e $\dot{y}$ aos anos cessante e novo e s, $\dot{s}$ aos séculos em curso nestes dias, tipicamente os mesmos, claro.

As mencionadas restantes partes da fórmula são

$*_1 : \quad y + \lfloor y/4 \rfloor + \lfloor s/4 \rfloor - 2s, \quad$ e

$*_2 : \quad \dot{y} + \lfloor \dot{y}/4 \rfloor + \lfloor \dot{s}/4 \rfloor - 2\dot{s} - \delta.$

Caso: $y < 99$. Neste caso $\dot{y} = y + 1, \dot{s} = s$.

Se o novo ano não for bissexto, $\delta = 0$, e $4 \nmid \dot{y}$ o que faz com que $\lfloor \dot{y}/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$. Decorre que na passagem de $*_1$ para $*_2$ adicionamos exatamente 1 módulo 7, como queríamos.

Se o ano novo for bissexto, δ=1, e com o $y \leq 98$, $4|\dot{y}$, e $\lfloor \dot{y}/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor + 1$. Assim na passagem de $*_1$ para $*_2$ adicionamos mais uma vez $1 = 1 + 1 - 1$ módulo 7.

Caso: $y = 99$. Neste caso $\dot{y} = 0, \dot{s} = s + 1$.

Se $\delta = 0$, $\lfloor \dot{s}/4 \rfloor = \lfloor s/4 \rfloor$, e $*_1, *_2$ são
$99 + 24 + \lfloor s/4 \rfloor - 2s \equiv 4 + \lfloor s/4 \rfloor - 2s$, e
$0 + 0 + \lfloor s/4 \rfloor - 2(s+1) \equiv \lfloor s/4 \rfloor - 2s + 5$,
assegurando assim para $*_2$ a propriedade de sucessor. Se, finalmente, $\delta = 1$, então $\lfloor \dot{s}/4 \rfloor = 1 + \lfloor s/4 \rfloor$ e de $*_2$ 'sai' exatamente o mesmo valor que no caso anterior, pois o 1 adicional é equilibrado pelo valor $-\delta = -1$.

Logo, mais uma vez, temos em $*_2$ o sucessor módulo 7 de $*_1$.

Isto acaba a prova da fórmula. □

Quem quer mesmo calcular mentalmente os dias do ano corrente 2013, observe que muito do que é preciso para determinar o dia 1 de cada mês já sabemos: Como $\rho(E(1)) = 0$, e iniciámos a indução calculando que $\rho(N(1,1,13,20,0)) = 3$, obtemos pela fórmula, $\rho(N(1,m,13,20,0)) = 3 + \rho(E(m)) + 1$, para $m \geq 3$, e $3 + \rho(E(2))$ para $m = 2$, com somas a reduzir módulo 7, claro. Ou seja, os dias 1 do ano 2013, levam segundo a tabela $\rho(E(m))$, os seguintes rótulos, na sua ordem por mês: 3, 6, 6, 2, 4, 0, 2, 5, 1, 3, 6, 1; ou seja, são: Ter, sex, sex, seg, qua, sab, seg, qui, dom, ter, sex, dom.

Quem fixa isto (por grupos de quatro parece mais fácil), quando quer impressionar o bisneto calculando o dia 13 de agosto de 2013, seu dia onomástico, calcula assim: Lembra-se que 1 de agosto é uma quinta, 13 de agosto são 12 dias depois de quinta, logo é o dia que corresponde a $\rho(5 + 12) = 3$, uma terça!

A questão do título tem origem no *e-mail* de um colega já aposentado e muito respeitado pelos docentes do meu departamento. Ficou muito incomodado por, excetuando ele, ninguém de Coimbra ter ido ao almoço do septuagésimo segundo aniversário da SPM, que se realizou no passado dia 12 de dezembro em Lisboa. Defendi que esse dia foi uma quarta-feira (pois 01-12-12 foi um sábado logo, dia 12 foi $0 + 11 \equiv 4$!). Sou bem pago, seria um mau *role model* se faltasse num dia útil ao trabalho, ainda por cima em tempos de crise. Mas se festas destas fossem feitas aos domingos participaria frequentemente. Supondo que a SPM continua a celebrar o seu aniversário no próprio dia, quando poderei então ir? De quarta até domingo são 4 dias. A função $y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor$, começando com 12, aumenta segundo os passos 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1. É só agora que a soma é congruente a 4 módulo 7. Daqui a 9 anos, e não antes, a SPM faz o seu octogésimo primeiro aniversário num domingo e nessa altura garanto, realize-se este onde se realizar, vou aparecer (a não ser que tenha um fim de semana Delfos nesse dia).

O nosso tópico podia ter sido abordado de forma genética – podíamos ter reunido aos poucos as ideias que permitem construir a fórmula. Tal abordagem encontra-se, por exemplo em [R], mas precisa um pouco mais da teoria dos números. Na definição de *E(m)* é necessário 'experimentar e ter sorte' de qualquer forma. Assim preferimos o método rápido do ladrão: apropriámo-nos da fórmula como de uma joia cujo valor posteriormente verificámos.

Provas de empenho na leitura de Cantos Délficos são certificados pelo

Projecto Delfos,
Dep. de Matemática da FCTUC, Apartado 3008,
EC Santa Cruz
3001-501 Coimbra,
e-mail: delfos@mat.uc.pt

Agradecimentos: A indicação do livro [R] deve-se a Wiland Schmale, Oldenburg, Alemanha; a eliminação de uma série de deselegâncias linguísticas à minha querida Bernardete. A equipa editoral incluiu a figura e emendou os restantes deslizes.

REFERÊNCIAS

[NZ] I. Niven, H.S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*, J. Wiley & Sons Inc. 1972.

[R] K. Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications*, Addison Wesley 1984.

[S] Ian Stewart, "A Guide to Computer Dating", *Scientific American*, November 1996.