



Observar Golfinhos... com Trigonometria

PEDRO DUARTE,^(a) TELMO PEIXE^(b) E TERESA CAISSOTTI^(c)

^(a)FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DE LISBOA, ^(b)FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DE LISBOA, ^(c)ESCOLA SECUNDÁRIA LEAL DA CÂMARA
pduarte@ptmat.fc.ul.pt tjeixe@fc.ul.pt teresa.caissotti@eslc.pt

1. A QUESTÃO INICIAL

Este artigo surgiu de uma conversa com a bióloga Rute Portugal, membro de uma equipa de investigadores que faz observação de golfinhos no rio Sado à entrada da baía de Setúbal. A monitorização dos roazes é feita, usando instrumentos óticos apropriados, por dois observadores em simultâneo, um em cada uma das margens da embocadura do Sado. Devido a erros de medição, a posição do golfinho não pode ser determinada exatamente. Em vez disso a sua 'localização' é registada como a região de interseção dos 'ângulos de observação' dos dois observadores, conforme se ilustra na figura 1. A amplitude desses ângulos corresponde ao erro de precisão dos instrumentos óticos usados. O problema que nos foi colocado consiste na determinação da área dessa região onde o golfinho avistado se 'localiza'.

A região de localização do roaz é tipicamente um quadrilátero convexo, mas pode degenerar num triângulo ou num quadrilátero aberto com área infinita. Por esta razão a sua



Figura 1: Representação da localização de dois observadores avistando um golfinho.

O erro na localização de um golfinho efetuada por dois observadores à entrada do estuário do Sado é expresso através duma área. Usando um pouco de Trigonometria e Geometria Euclideana obtemos fórmulas para esse erro e mostramos como a função erro depende da posição do golfinho.

área é dada por diferentes expressões analíticas, dependendo da posição do golfinho. Coloca-se então a questão de determinar as configurações possíveis e calcular as respetivas áreas desta região.

2. O PROBLEMA MATEMÁTICO

Dois observadores posicionados nos pontos A e B , a uma distância d um do outro, observam em simultâneo um roaz no ponto C . Os instrumentos óticos usados têm uma escala que indica o ângulo da direção em que a observação é efetuada. Sejam $\theta_1 = m(\angle ABC)$ e $\theta_2 = m(\angle BAC)$ os ângulos medidos pelos observadores A e B respetivamente, e seja θ a margem de erro na escala dos instrumentos óticos. Chamaremos 'ângulos de observação' dos observadores A e B aos ângulos de amplitude 2θ que têm como bissetrizes as semiretas AC e BC respetivamente. A interseção dos dois ângulos de observação é uma região convexa a que nos vamos referir como o 'polígono de localização' do golfinho.

O polígono de localização tanto pode ser um polígono fechado delimitando uma área finita, como uma região aberta e ilimitada com área infinita, a que, por abuso de linguagem, nos vamos referir como um 'polígono aberto'. Na figura 2 estão representadas quatro configurações possíveis do polígono de localização do golfinho, que no quarto exemplo fica aberto com área infinita.

A área deste polígono depende da dis-

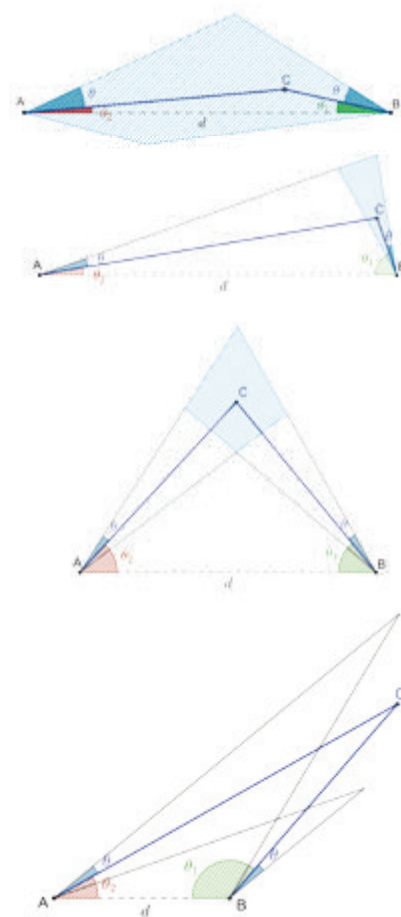


Figura 2: Representação geométrica dos observadores (pontos A e B) e de quatro possíveis localizações do golfinho (ponto C).

tância d entre os dois observadores, da margem de erro θ do instrumento ótico de observação e das medições θ_1 e θ_2 efetuadas pelos dois observadores. Vamos agora recorrer a alguns resultados bem conhecidos de geometria euclidiana (c.f. [1]) para obter a área do polígono de localização em cada uma das suas diferentes configurações.

3. ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Consideremos um triângulo de vértices A , B e C cujas medidas dos lados opostos a cada vértice são a , b e c , respectivamente, e cujas medidas dos ângulos internos são α , β e γ , conforme representado na figura 3. Sabemos que são válidas as seguintes propriedades:

Área do triângulo: $A_{[ABC]} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$;

Lei dos Senos: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

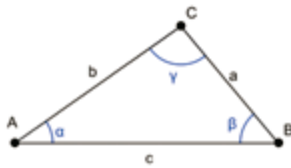


Figura 3: Representação do triângulo $[ABC]$.

Teorema 1 (Arco Capaz). Consideremos uma circunferência com duas retas secantes à circunferência e concorrentes entre si num ponto Q .

(i) Se Q pertence à circunferência (figura 4 (1)), então a medida do ângulo $\angle TQR$ é dada por

$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR})}{2},$$

em que $m(\widehat{TR})$ é a medida do arco \widehat{TR} que não contém o ponto Q .

(ii) Se Q pertence ao exterior da circunferência (ver figura 4 (2)), então

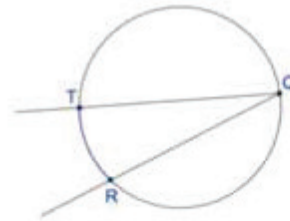
$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR}) - m(\widehat{PS})}{2}.$$

(iii) Se Q pertence ao interior da circunferência (ver figura 4 (3)), então

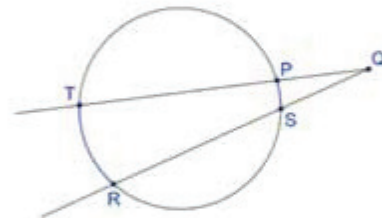
$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR}) + m(\widehat{PS})}{2}.$$

Como consequência deste teorema temos a seguinte proposição:

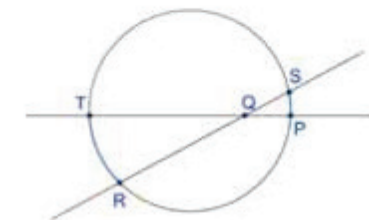
Proposição 2. Dados dois pontos A e B e um ângulo α com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o lugar geométrico dos pontos E tais que $\angle EAB + \angle EBA = \alpha$ é a união de dois arcos de circunferência com extremidades A e B .



(1) ponto Q sobre a circunferência



(2) ponto Q no exterior da circunferência



(3) ponto Q no interior da circunferência

Figura 4: Representação do ponto de interseção, Q , de duas retas secantes à circunferência.

4. GEOMETRIA DO PROBLEMA

As questões matemáticas motivadas por este problema vão além do cálculo da referida área propriamente dita. Por exemplo, considerando a figura 5, existe alguma relação entre os pontos A , B , C , D e F ? Como são as curvas, na carta geográfica, que separam as regiões correspondentes às diferentes configurações do polígono de localização? E como é a curva que delimita a região onde o polígono é fechado?

Considerando a figura 5 temos que

$$\begin{aligned} m(\angle ACB) &= m(\angle ADB) = m(\angle AFB) \\ &= 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (1)$$

onde θ_1 e θ_2 representam os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BAC$ medidos pelos observadores A e B respectivamente.

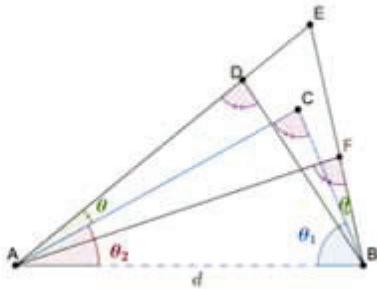


Figura 5: Representação geométrica dos observadores (pontos A e B), do golfinho (ponto C) e dos pontos D e F .

Recordando que três pontos não colineares determinam uma circunferência e supondo que o golfinho não se encontra em linha reta com os observadores, consideremos a circunferência que passa em A , B e C .

Proposição 3. Os pontos D e F pertencem à circunferência determinada pelos pontos A , B e C .

Suponhamos, com vista a um absurdo, que D está no exterior da circunferência e designemos por D_1 e D_2 os pontos de interseção dos segmento de reta \overline{DB} e \overline{DA} com a circunferência, respectivamente (figura 6).

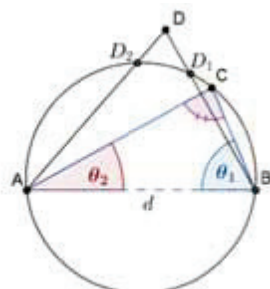


Figura 6: Supondo que o ponto D está no exterior da circunferência.

Usando (ii) do Teorema do Arco Capaz, temos que

$$m(\angle ADB) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{D_1D_2})}{2}$$

e por (i)

$$m(\angle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

o que é absurdo por (01).

Suponhamos agora, também com vista a um absurdo, que D está no interior da circunferência e designemos também por D_1 e D_2 os pontos de interseção das retas DB e DA com a circunferência, respectivamente (figura 7).

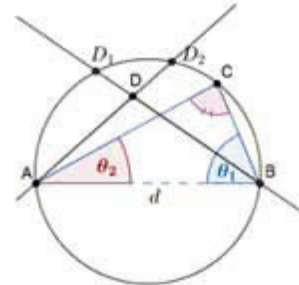


Figura 7: Supondo que o ponto D está no interior da circunferência.

Usando (iii) do Teorema do Arco Capaz, temos que

$$m(\angle ADB) = \frac{m(\widehat{D_1D_2}) + m(\widehat{AB})}{2}$$

e por (i)

$$m(\angle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

o que novamente é absurdo por (1).

Provamos assim que o ponto D pertence à circunferência determinada pelos pontos A, B e C . Analogamente se prova que o ponto F também pertence à mesma circunferência. Concluimos assim que os pontos A, B, D, C e F pertencem à mesma circunferência, conforme a figura 8.

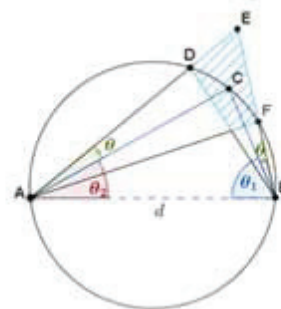
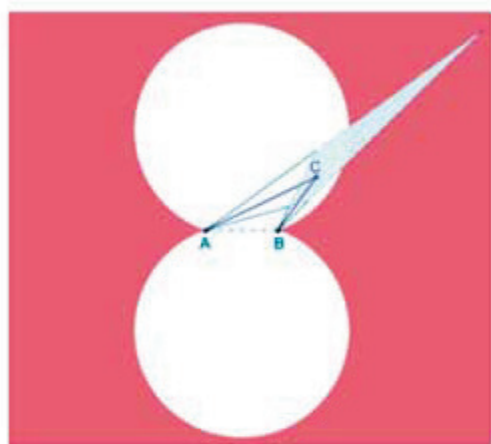


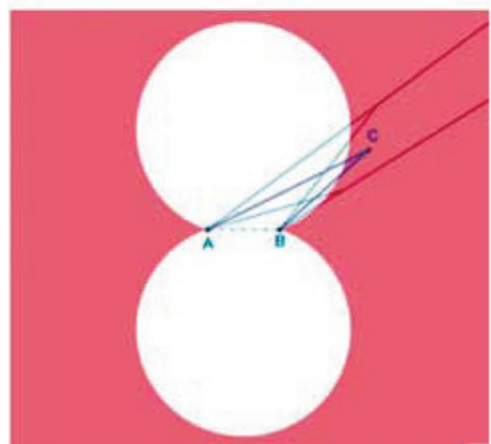
Figura 8: Representação da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e F .

Sejam A, B os pontos que representam as posições dos observadores. Pela Proposição 2, o conjunto dos pontos C tais que $\theta_1 + \theta_2 < 180^\circ - 2\theta$, onde como anteriormente

$\theta_1 = m(\angle BAC)$ e $\theta_2 = m(\angle ABC)$, é a união de todos os arcos de circunferência com extremidades A e B correspondentes a ângulos $\alpha < 180^\circ - 2\theta$. Este conjunto está representado pela região a branco na figura 9.



(1) Polígono fechado



(2) Polígono aberto

Figura 9: Regiões onde o polígono é fechado (a branco) e aberto (a vermelho).

Recordando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , e considerando a figura 8, vemos que o polígono de localização, que é a interseção dos ângulos $\angle EAF$ e $\angle DBE$, ambos de amplitude 2θ , é fechado se $\theta_1 + \theta_2 < 180^\circ - 2\theta$, e é aberto quando $\theta_1 + \theta_2 \geq 180^\circ - 2\theta$.

Logo, remetendo novamente para a figura 9, podemos concluir que sempre que o golfinho é avistado na região a branco temos um polígono de localização fechado. Caso contrário, o polígono é aberto e a respectiva área infinita.

No caso em que o polígono de localização é fechado te-

mos três situações distintas, que correspondem aos três primeiros casos da figura 2:

1) $\theta_1 \leq \theta$, $\theta_2 \leq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_1 ;

2. i) $\theta_1 \leq \theta$, $\theta_2 \geq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_2 ;

ii) $\theta_1 \geq \theta$, $\theta_2 \leq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_3 ;

3) $\theta_1 \geq \theta$, $\theta_2 \geq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_4 .

Quando $2\theta + \theta_1 + \theta_2 \geq 180^\circ$ o polígono é aberto, e a sua área é infinita, o que na figura 10 corresponde à região R_5 .

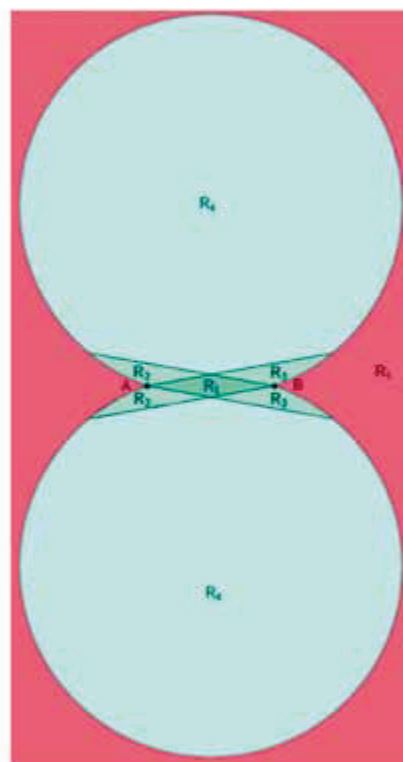


Figura 10: Representação das regiões onde o golfinho se pode localizar.

5. ÁREA DO POLÍGONO DE LOCALIZAÇÃO

Considerando a figura 10, temos que o polígono de localização do golfinho pode ter diferentes formas dependendo de ser avistado na região R_1 , R_2 , R_3 ou R_4 . Apresentamos em seguida a fórmula do cálculo da área do polígono em cada uma das regiões. No entanto, apenas mostramos como calcular a área no caso R_4 por ser o que envolve mais cálculos.

Nos outros casos os cálculos são análogos.

(R₁) Se o golfinho é avistado na região R₁, temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 11.

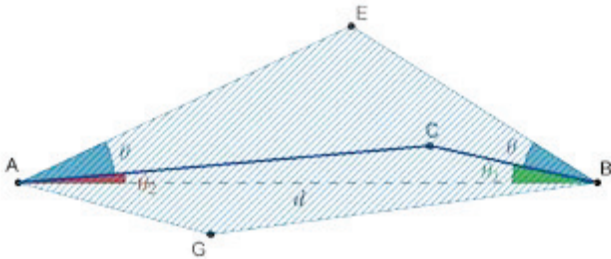


Figura 11: Representação do polígono de localização do golfinho na região R₁.

A área do polígono [AEBG] em função de d , θ , θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{d}{2} (\overline{AE} \sin(\theta - \theta_2) + \overline{AG} \sin(\theta + \theta_2))$$

em que

$$\overline{AE} = \frac{d \sin(\theta - \theta_1)}{\sin(2\theta - \theta_1 - \theta_2)} \quad \text{e} \quad \overline{AG} = \frac{d \sin(\theta + \theta_1)}{\sin(2\theta + \theta_1 + \theta_2)}.$$

(R₂) Se o golfinho é avistado na região R₂, temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 12.

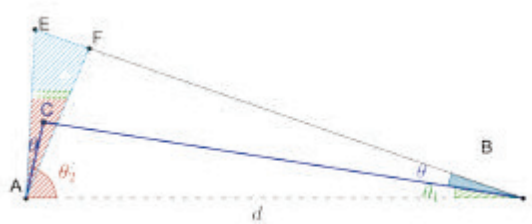


Figura 12: Representação do polígono de localização do golfinho na região R₂.

A área do polígono [AEF] em função de d , θ , θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{AE} \overline{AF} \sin(2\theta))$$

em que

$$\overline{AE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} \quad \text{e} \quad \overline{AF} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

(R₃) Se o golfinho é avistado na região R₃, temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 13.

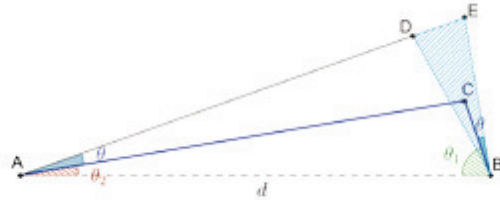


Figura 13: Representação do polígono de localização do golfinho na região R₃.

A área do polígono [BDE] em função de d , θ , θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{BD} \overline{BE} \sin(2\theta))$$

em que

$$\overline{BD} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \overline{BE} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)}.$$

(R₄) Finalmente, se o golfinho é avistado na região R₄, temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 14.

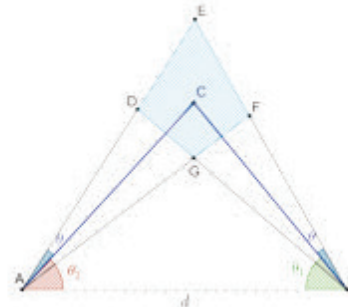


Figura 14: Representação do polígono de localização do golfinho na região R₄.

A área do polígono [DEFG] em função de d , θ , θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{DE} \overline{EF} \sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta) + \overline{DG} \overline{FG} \sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta))$$

em que

$$\overline{DE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\overline{EF} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\overline{DG} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - \frac{d \sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta)}$$

e

$$\overline{FG} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta)}.$$

Mostremos apenas como se obtém \overline{DE} pois os outros são análogos.

Considerando os triângulos $[ABE]$ e $[ABD]$ e aplicando a Lei do Senos, temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\theta_1 + \theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)}$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\theta_1 - \theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\theta_1 + \theta_2)},'$$

e como $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$, fazendo $\overline{AB} = d$, temos que

$$\overline{DE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Assim, observando que a área do polígono $[DEFG]$ é a soma das áreas dos triângulos $[DEF]$ e $[DFG]$, aplicando a fórmula “Área do triângulo”, temos o resultado.

6. OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIAÇÃO DA ÁREA DO POLÍGONO

Em cada uma das regiões onde o polígono é fechado, dependendo do local onde o golfinho é avistado, o cálculo da área do respetivo polígono deve ser efetuado usando a fórmula especificada na secção anterior.

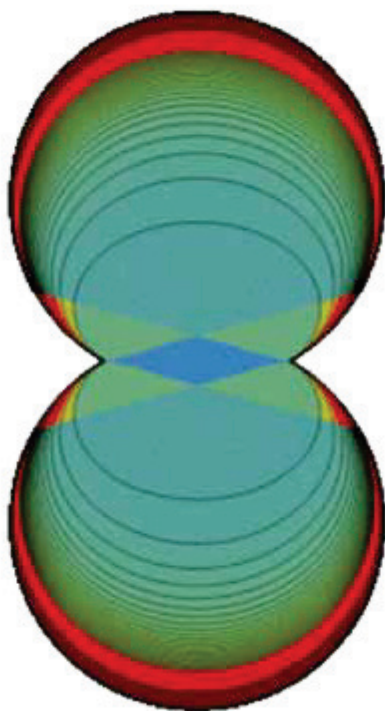


Figura 15: Representação de curvas de nível da área do polígono onde se localiza o golfinho.

Recorrendo ao programa *Mathematica* obtivemos uma representação das curvas de nível da função área do polígono de localização do golfinho. Na figura 15 podemos ver um *density plot* com a variação da área do polígono nas diferentes regiões.

Observemos, por exemplo, que na região atrás referida como R_4 , à medida que o golfinho se afasta dos observadores, a área do polígono aumenta até ao infinito, quando o golfinho alcança o arco limite que separa as regiões R_4 e R_5 a partir do qual o polígono deixa de ser fechado.

Agradecimentos

Agradecemos à Rute Portugal enquanto membro investigadora num projeto do Professor Francisco Andrade do IMAR - Instituto do Mar, por ter colocado a questão de como calcular a área do polígono onde se localiza o golfinho, o que motivou a elaboração deste texto.

Agradecemos ainda à Patrícia Mota, também do projeto IMAR, pelas fotos dos golfinhos que tirou a bordo da embarcação “Costa Azul”.

REFERÊNCIAS

- [1] Araújo, P. V., *Curso de Geometria*, Gradiva, 1998.

SOBRE OS AUTORES

Pedro M. Duarte licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1985, e obteve o seu doutoramento em 1993, na área dos Sistemas Dinâmicos, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada no Rio de Janeiro. Atualmente é professor auxiliar no departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Telmo Peixe licenciou-se em matemática em 2008 na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa onde prosseguiu os estudos em Matemática, tendo concluído o mestrado dois anos depois. Actualmente está a fazer o doutoramento na mesma instituição sob a orientação do Professor Pedro Miguel Duarte, na área da Análise Matemática.

Teresa Caissotti, professora do quadro da Escola Secundária Leal da Câmara, é licenciada em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Nesta faculdade concluiu ainda os mestrados em Probabilidades e Estatística (1991) e em Matemática para Professores (2012). Criou, concebeu e foi responsável pelas oficinas de matemática no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa (2002-2005).