António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

A **EQUAÇÃO** QUE **NUNCA** FOI DE **PELL**

Como determinar todas as soluções, em números naturais, da equação $x^2 - 2y^2 = 1$? E as de $x^2 - 61y^2 = 1$? Equações deste tipo são designadas por *equações de Pell*, apesar de John Pell (1611–1685) nunca ter tido nada a ver com o assunto e de terem sido investigadas séculos antes deste ter nascido. Mas, não obstante a sua longa história, contêm ainda alguns mistérios por desvendar.

A designação *equação de Pell* refere-se, de facto, à família de equações:

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

onde a é um número natural maior que 1, usualmente livre de quadrados[1], isto é, que não é divisível por um quadrado perfeito superior a 1. Mais ainda, está subentendido que se pretende resolver a equação em números naturais, ou seja, em que se procuram todas as suas soluções com $x, y \in \mathbb{N}$. Quando a não é um quadrado perfeito, esta equação tem uma infinidade de soluções que se podem todas obter de uma particular, por essa razão chamada *fundamental*. Por exemplo, as soluções em números naturais de $x^2 - 2y^2 = 1$ são todas obtidas a partir de $x_1 = 3, y_1 = 2$ fazendo, sucessivamente, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Obtêm-se assim $(x,y) = (17, 12)$, $(99, 70)$, $(577, 408)$, $(3363, 2378)$, $(19601, 13860)$, etc.

A referência explícita mais antiga que se conhece a respeito destes pares de números, de facto a uma família um pouco mais geral, a das soluções de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, está contida na obra de Teão de Esmirna[2], que viveu algures no século II. Pensa-se, no entanto, que Teão conhecia estes assuntos de fontes pitagóricas bastante anteriores ao seu tempo. Estes números, que se obtêm de $x_1 = 1, y_1 = 1$ tomando, sucessivamente, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

são apelidados de algo como *lado* (y_n) e *diagonal* (x_n). A construção sumariada na figura 1 (página seguinte), que pode ser usada para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional e que se deixa ao cuidado do leitor entender, conduz ao seguinte: fazendo $d - \ell = y_n$ e $2\ell - d = x_n$, obtém-se precisamente $d = x_n + 2y_n$ e $\ell = x_n + y_n$. Isto poderá explicar os nomes de lado e diagonal.

Evidência de que o assunto era conhecido muito antes da época em que Teão de Esmirna viveu, foi descoberta por

[1] É fácil ver que os outros casos podem ser reduzidos a este, e que se a for um quadrado perfeito então a equação não tem soluções, em números naturais.

[2] A tradução para o francês, publicada em 1892 por J. Dupuis, da obra de Teão de Esmirna com o título de *Exposição dos Conhecimentos Matemáticos Úteis para a Leitura de Platão* encontra-se disponível em *http://www.wilbourhall.org*, um site com traduções de textos antigos, originalmente em grego, sânscrito, árabe e latim, sobre matemática e astronomia

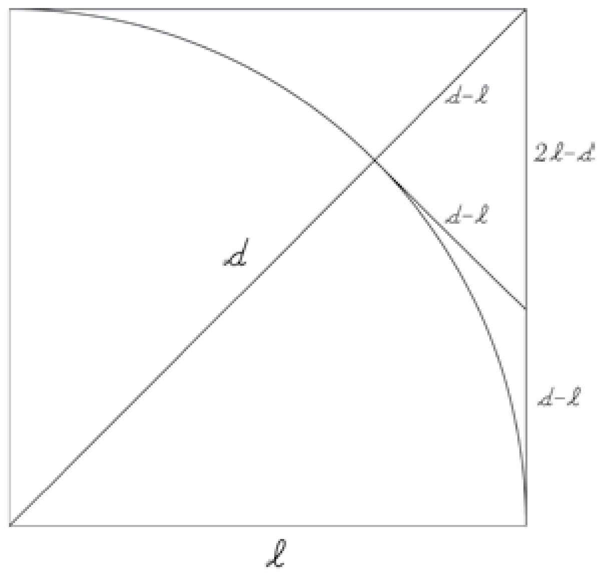

Figura 1

Gotthold Lessing (1729--1781), escritor alemão e uma figura importante do Iluminismo. Este, enquanto director da Biblioteca Herzog August in Wolfenbüttel, descobriu, num dos manuscritos ao seu cuidado, um curioso epigrama que contém um problema que tudo indica ser da autoria de Arquimedes, e que aqui reproduzimos, com alguma liberdade de tradução de modo a simplificar a sua leitura.[3]

O PROBLEMA DE ARQUIMEDES

Se fores diligente e sábio, ó estranho, calcula o número de bovídeos do deus Sol, que há muito tempo atrás pastavam pelos campos da ilha trinácria da Sicília, divididos em quatro manadas de diferentes cores, uma branca como o leite, outra de um preto lustroso, uma terceira amarela e a última malhada.

Em cada uma havia bois, imensos em número, de acordo com estas proporções: Entende, estranho, que os bois brancos eram tantos quantos a metade e um terço da manada preta em conjunto com todo o gado amarelo, enquanto que os bois pretos eram tantos quantos a quarta parte mais um quinto dos malhados conjuntamente com, novamente, todo o gado amarelo. Sabe ainda que os restantes bois, os malhados, eram em número igual à sexta parte mais um sétimo dos brancos e mais toda a manada amarela.

Esta era a proporção das vacas: As brancas eram precisamente iguais, em número, a uma terça parte mais um quarto de toda a manada preta; as vacas pretas eram tantas quantas a quarta mais a quinta parte de todo o gado malhado, quando bois e vacas iam para o pasto juntos. Agora, as malhadas eram iguais, em número, à quinta mais a sexta parte de toda a manada amarela. Finalmente, as vacas amarelas eram iguais, em número, à sexta mais a sétima parte da manada branca.

Se tu, ó estranho, conseguires dizer com exactidão qual o número de cabeças de gado do deus Sol, fornecendo separadamente o número de bois bem alimentados e o número de fêmeas de acordo com cada cor, então tu não poderás ser chamado de inábil ou ignorante dos números, mas ainda não poderás ser contado entre os sábios.

Mas vem, entende também todas estas condições que dizem respeito ao gado do deus Sol. Quando os bois brancos misturavam o seu número com os bois pretos, mantinham-se todos firmes, iguais em profundidade e largura, e as planícies da Sicília ficavam repletas em todas as direcções com a sua multitude.

De igual modo, quando os bois amarelos e os bois malhados eram reunidos numa só manada, colocavam-se de tal modo que o seu número, começando com o um, crescia lentamente até completar uma figura triangular, não havendo bois de outras cores entre eles, nem faltando algum.

Se fores capaz, ó estranho, de determinar todas estas coisas e de as reunir juntas na tua mente, fornecendo todas as suas relações, então tu partirás coroado de glória e sabendo que foste julgado perfeito neste género de sabedoria.

Fica ao cuidado do leitor perceber que este problema conduz a uma equação de Pell. Mas fica desde já avisado que, apesar do problema ter uma infinidade de soluções, a menor é um número com 206, 545 algarismos!

Para saber mais sobre este intrigante problema, consultar o artigo de D. Joyce, disponível em *http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/cattle.pdf*, assim como o artigo de H. W. Lenstra Jr. publicado nas *Notices da AMS* em Fevereiro de 2002, disponível em *http://www.ams.org/notices/200202/fea-lenstra.pdf*.

A equação dita *de Pell* foi também amplamente estudada por matemáticos indianos, pelo menos desde Brahmagupta no século VII, até Bhāskara no século XII. Num comentário escrito no século XI é descrito um processo para a resolver que ficou conhecido como o *método cíclico*, e que é atribuído, nesse documento, a um outro matemático indiano, Jayadeva, do qual se conhece apenas esta referência.[4]

Actualmente, a equação de Pell está intimamente ligada às unidades dos anéis de inteiros dos corpos quadráticos, ou seja à aritmética de conjuntos como, por exemplo, $\mathcal{A} = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. A soma e o produto de dois elementos de $\mathcal{A}$ é ainda um elemento de $\mathcal{A}$, tendo este conjunto, munido dessas operações, uma aritmética algo análoga à dos inteiros, havendo primos e compostos, assim como factorização única em primos (neste caso). Uma pequena diferença é que, enquanto em $\mathbb{Z}$ há apenas dois elementos que têm inversos multiplicativos, nomeadamente ± 1, em $\mathcal{A}$ há uma infinidade, nomeadamente: $\{\pm(1+\sqrt{2})^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Tem-se que $\pm(1+\sqrt{2})^m$ é um número da forma $a + b\sqrt{2}$, para alguns $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a - 2b^2 = \pm 1$, e quando m percorre todos os inteiros, a e b percorrem todas as soluções desta equação. Pondo $(1+\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, obtêm-se os números descritos em (02), enquanto que $(1+\sqrt{2})^{2n} = x_n + y_n\sqrt{2}$ dá todos os descritos por (01).

Tudo isto, e muito mais, incluindo aplicações relativamente recentes da equação de Pell à Criptografia, pode ser visto num livro inteiramente dedicado a esta equação: Michael J. Jacobson Jr., Hugh C. Williams, *Solving the Pell Equation*, Springer, 2009. Também o artigo acima referido de H. W. Lenstra Jr. deixa claro que, como esse autor escreve, a última palavra sobre a equação de Pell ainda não foi proferida, em particular no que diz respeito a algoritmos para encontrar a solução fundamental.

Dada toda a longa história desta equação muito especial (na realidade, como referido, trata-se de facto duma família de equações), porque se lhe chama então "*equação de Pell*"? A culpa é de Leonhard Euler que escreveu algures, erradamente, que foi John Pell que encontrou um método para as resolver. É muito provável que tal tenha resultado de uma leitura apressada de partes da *Algebra* de Wallis, numa fase em que, como Weil diz (*loc.cit.* p.174), "*Euler devia ser um leitor descuidado por essa altura*"[5].

Sendo Euler quem foi, o nome pegou e não há agora como o alterar. Mas, como Shakespeare tão bem explicou por intermédio da sua célebre Julieta, não é o nome que interessa, pois a equação que chamamos de Pell por outro qualquer nome seria igualmente fascinante.

[3] Ver *https://www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html*.

[4] Sobre este assunto, ler André Weil, *Number Theory: an approach through history, from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984, pp. 19–24.

[5] Ver também Heath, *Diophantus of Alexandria: a study in the history of Greek Algebra*, segunda edição, Cambridge University Press, 1910, pp.286, especialmente a nota-de-rodapé 4. Esta obra está disponível *online* em *https://archive.org/details/diophantusofalex00heatiala*, assim como em *http://www.wilbourhall.org*.