PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES


Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

GRUPO E_8 *SUPERSTAR*

Em 2007 foi finalmente concluído o projeto de descrever o gigantesco grupo E_8. O feito envolveu a participação de um vasto grupo de matemáticos e pesados cálculos computacionais. E chegou às páginas do *The New York Times*.

Embora possa não parecer, um dos grandes interesses dos matemáticos é simplificar. Quando se fala de números naturais, por exemplo, um dos teoremas mais famosos é o da decomposição em fatores primos. Estes são, por assim dizer, os naturais mais simples de todos, à custa dos quais podemos construir todos os outros.

Outros objetos, menos conhecidos do público em geral mas muito centrais em matemática, são os grupos. Estes podem ser definidos como conjuntos onde está definida uma operação que é associativa, com elemento neutro, e para a qual todos os elementos têm inverso. Um modo natural de pensar nos grupos é vê-los como conjuntos de simetrias de algum objeto. Por exemplo, o conjunto das bijeções de $\{1, \ldots, n\}$ em si mesmo forma o famoso grupo simétrico sobre n objetos. Podemos também pensar nos grupos de aplicações do espaço tridimensional nele próprio que preservam a distância, conhecido como o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$. Em linguagem matemática, dizemos que os grupos atuam sobre estes conjuntos.

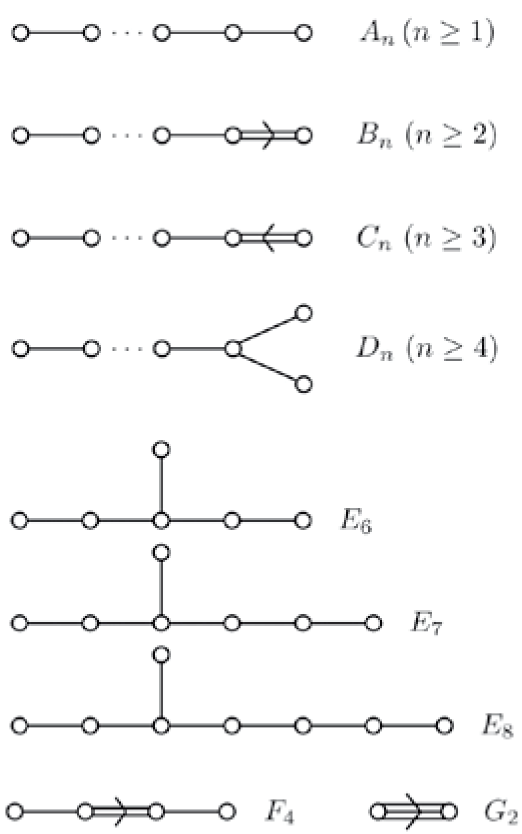
Como há uma grande variedade de grupos, é razoável dividi-los em famílias e perguntar, dentro de cada família, quais são os membros mais simples, e se os restantes se podem construir a partir destes, tal como acontece com os inteiros. Os grupos finitos formam uma destas grandes famílias de grupos. Dentro destes, os grupos *simples* (é este o termo técnico) desempenham um papel semelhante ao dos primos para os números inteiros.

Além de se saber quais são os grupos simples, é importante saber um pouco mais sobre eles. Há certas funções, definidas num grupo e com valores complexos, que contêm informação importante sobre o grupo, chamadas carateres, que passamos a descrever informalmente. Como dissemos, é natural esperar que um grupo atue sobre certos conjuntos, e quando os elementos atuam como aplicações lineares de um espaço vetorial nele próprio, a ação leva o nome de representação. Cada representação faz assim corresponder a cada elemento do grupo uma aplicação linear, e o caráter é então a função que faz corresponder a cada elemento o traço dessa aplicação.

A classificação dos grupos simples finitos é mais complicada do que a dos primos: demorou quase cinquenta anos a fazer (de 1955 a 2004) e envolveu mais de cem autores.

Outra família de grupos, menos fácil de definir mas igualmente central em matemática desde o século XIX, é a dos grupos de Lie, que combinam duas estruturas: são simultaneamente um grupo e uma variedade diferenciável – além de serem infinitos, têm, ao contrário dos grupos finitos, uma natureza contínua. O grupo de rotações em torno de um ponto fixo de $\mathbb{R}^3$ é um exemplo de um destes grupos.

A descrição destes grupos pode ser feita recorrendo a uma estrutura de álgebra não associativa que se pode estabelecer no espaço tangente ao elemento identidade. Chama-se a essa estrutura uma *álgebra de Lie*. E, por sorte, a classificação das álgebras de Lie *simples* (mais uma vez, é este o termo técnico) faz-se através de estruturas combinatórias muito elegantes: os diagramas de Dynkin. Ei-los.



A cada diagrama corresponde uma álgebra. Como vemos, há quatro famílias infinitas, A_n, B_n, C_n e D_n, e cinco álgebras excecionais. A maior destas álgebras excecionais é E_8, de dimensão 248.

A partir desta classificação das álgebras, começou-se o caminho inverso: conhecer os grupos que a elas estão associados. Este percurso é sinuoso e não unívoco: a cada álgebra podem estar associados vários grupos. Além disso, há outro problema: se inicialmente os grupos eram variedades reais, foi necessário considerar álgebras sobre $\mathbb{C}$ para estabelecer esta classificação. O regresso a $\mathbb{R}$ também não é unívoco: há vários grupos reais associados a cada grupo complexo oriundo das álgebras, em particular, para cada grupo complexo há dois grupos reais especiais (podendo haver outros): a forma compacta e a *split form* – e é a esta última que vamos referir-nos a partir de agora.

Tal como aconteceu com os grupos finitos, estabeleceu-se um projeto de elaborar um atlas dos grupos de Lie e suas representações, que se pode encontrar na página [2]. Tal como no caso dos grupos finitos, parte da compreensão dos grupos de Lie envolve um estudo dos seus carateres. O seguinte resultado, de Langlands e Knapp-Zuckerman, permite que os carateres mais simples (irredutíveis) se caracterizem por uma matriz: estes dividem-se num número finito de famílias $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq N$ sendo que em cada família há um número finito de *carateres infinitesimais* χ_i^λ (as variáveis i e λ apenas tomam um número finito de valores). Por sua vez, Harish-Chandra provou que estes carateres infinitesimais se escrevem como

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(1)\Theta_j^\lambda$$

para certas funções Θ_j^λ e certos polinómios P_{ij}, chamados *polinómios de Kazhdan-Lusztig*. Portanto, os coeficientes $P_{ij}(1)$ caracterizam completamente os carateres. Há um mar de detalhes teóricos e técnicos que estamos propositadamente a omitir; quem quiser conhecer mais pormenores poderá consultar o artigo [Vo] disponível em [2].

O projeto dedicou-se então a encontrar estes polinómios de Kazhdan-Lusztig para as *split real forms* dos grupos vindos dos diagramas de Dynkin excecionais, pois os seus valores em 1 determinavam então toda a estrutura dos carateres, segundo a fórmula acima. Esta iniciativa começou a tomar forma em 2003. Depois de sucessivamente tratados todos os outros grupos, o que ficou terminado em 2005, restava E_8, o maior de todos. Para o grupo E_8, de dimensão 248, os polinómios ocupavam uma matriz quadrada de tipo $453,060 \times 453,060$ (ainda que a matriz fosse triangular inferior, o que dava cerca de cem mil milhões de entradas para preencher)[1].

Os cálculos foram feitos em vários computadores, o maior dos quais com 128G de RAM e 128G de memória adicional

[1] David Vogan apresentou estes resultados numa palestra intitulada ``The Character Table for E_8 or How we wrote down a $453,060 \times 453,060$ matrix and found happiness''.

(*swap space*) e teve de recorrer a aritmética modular e a *software* feito de propósito para o efeito (embora se tenha usado também o *software sage*, que está disponível gratuitamente, ver [4]. As primeiras frases do artigo [Vo] descrevem o fim do processo:

> *"On January 8, 2007, just before 9 in the morning, a computer finished writing to disk about sixty gigabytes of files containing the Kazhdan-Lusztig polynomials for the split real group G of type* E_8*. Values at 1 of these polynomials are coefficients in characters of irreducible representations of G; so all irreducible characters were written down."*

Como termo de comparação, note-se que o genoma humano se consegue codificar em menos de um *gigabyte*.

Este feito gerou um grande interesse, mesmo para o público não matemático. O próprio *The New York Times* falou do assunto, ver [NYT]. Além disso, o grupo E_8 tem tantas simetrias que o fisico Garrett Lisi o considera uma peça fundamental para a integração de várias teorias e a eventual criação de uma "teoria de tudo" (veja-se, por exemplo, a "TED Talk" [3]). Isto faz de E_8 um grupo verdadeiramente *excecional*.

Sem mais parangonas, notamos que este resultado foi conseguido graças ao esforço de vários matemáticos, entre os quais os 21 que participaram (até agora) no projeto, quer teóricos quer ligados a implementação computacional de algoritmos. Aqui estão alguns deles, numa foto gentilmente cedida pelo *American Institute of Mathematics* (ver [1]).

Foi necessário traduzir resultados teóricos, sem nenhuma motivação computacional, em algoritmos implementáveis num computador. Foram usados teoremas recentes e antigos (com mais de 100 anos) e um poder de cálculo só há pouco tempo atingido.

Terminamos com uma imagem que se tornou popular. Tal como o diagrama de Dynkin, codifica a estrutura da álgebra E_8. O objeto original existe em 8 dimensões, esta é uma projeção para dimensão 2. A sua beleza, para além do seu significado, ajudou à popularidade que o trabalho sobre E_8 veio a ter.

REFERÊNCIAS

[Vo] David Vogan, "The Character Table for E8" , *Notices of the AMS*, vol. 54 (9), outubro de 2007.

[NYT] Kenneth Chang, "The Scientific Promise of Perfect Symmetry", *The New York Times*, 20 de março de 2007

http://www.nytimes.com/2007/03/20/science/20math.html?_r=0).

[1] *http://www.aimath.org/E8/*

[2] *http://www.liegroups.org/*

[3]*http://www.ted.com/talks/garrett_lisi_on_his_theory_of_everything.html*

[4] *http://www.sagemath.org/*