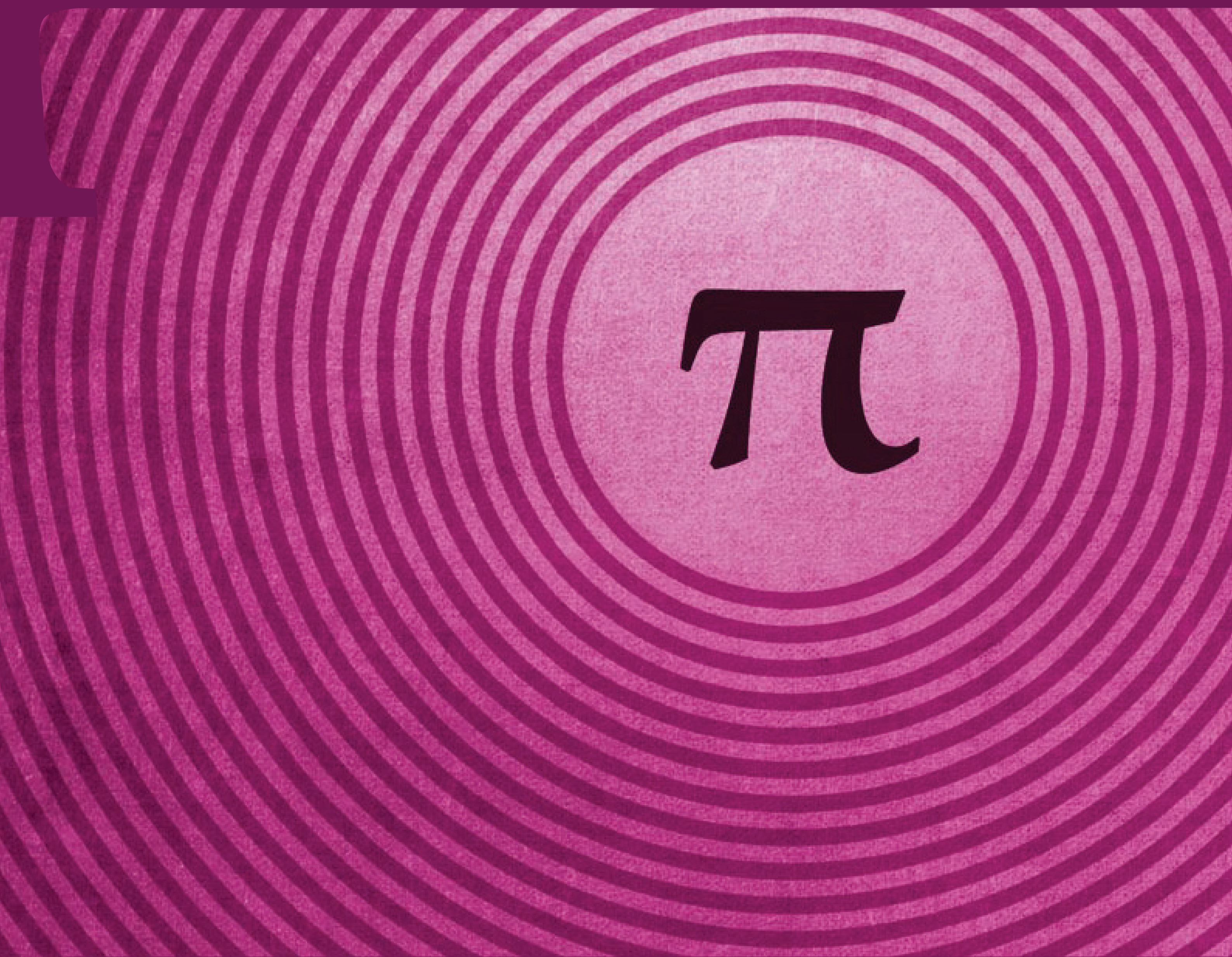

Números Irracionais no Ensino Básico: Os Desafios da História de π

Isabel Serra e Luísa de Sousa
Universidade de Lisboa
luisalousousa@gmail.com

Oensino do que é o "misterioso" π coloca dificuldades de vária ordem. Para as ultrapassar é possível usar alguns exemplos inspirados na história da matemática, como os que se apresentam neste artigo. As técnicas de aproximação de π, cujo percurso histórico é aqui rapidamente esboçado, podem também contribuir para esclarecer a natureza deste número.

1. O CÍRCULO E O NÚMERO Π

A medição de uma figura geométrica foi desde a Antiguidade uma questão importante pela sua utilidade imediata, mas constituiu também um problema fundamental da matemática. Medir comprimentos, áreas e volumes implica estabelecer a ligação entre geometria e número, o que originou ideias e técnicas inovadoras ao longo da história, mas também levantou problemas complexos acerca da natureza do número. De entre os objetos que materializam a relação entre figura geométrica e número, o mais célebre de todos talvez seja o círculo, tanto pelas suas particularidades e presença na natureza, como pela dificuldade em calcular as suas medidas, que dependem do "misterioso" π.

O desenvolvimento do cálculo integral tornou possível, a partir do século XVII, a determinação da área e do comprimento de figuras geométricas definidas por curvas, em particular das cónicas. Mas a medida exata do círculo não levanta apenas problemas de cálculo, passa também pela definição de número irracional, uma questão que só foi completamente resolvida no século XIX. Outros números há que, desde a Antiguidade associados à geometria, não podem também ser escritos com um número finito de dígitos. É o caso de $\sqrt{2}$ [1], ou a medida da diagonal do quadrado de lado 1.

Mas o número π, além de irracional, é transcendente, o que veio justificar uma outra impossibilidade célebre na história, a da quadratura do círculo. Assim, esta figura geométrica, colocada na encruzilhada de várias questões relativas à natureza dos números, é um exemplo concreto das dificuldades históricas e também didáticas na definição de número real.

O número π, a par das suas características e da sua história, destaca-se também no ensino atual por ser um dos primeiros irracionais a ser apresentado. Se por um lado a importância do círculo justifica que se aprenda desde cedo a calcular a sua área e o seu perímetro, por outro é impossível ignorar, e fazer ignorar, as dificuldades subjacentes a esses cálculos. Mas, precisamente, a história de π contém momentos e episódios que podem ser esclarecedores e simultaneamente aliciantes para quem ensina e aprende a medir o círculo. Ainda a propósito das dificuldades com π, é possível tratar algumas questões mais gerais e relevantes em vários níveis de aprendizagem, como "números e grandezas geométricas", "dízimas finitas e infinitas", "exatidão de uma medida", além de outras menos prioritárias no ensino elementar, como por exemplo as quadraturas.

É impossível percorrer num pequeno texto todos os cálculos e episódios que constroem essa história ímpar da matemática que é a do círculo e do número π. Nos próximos parágrafos apresentam-se apenas alguns exemplos históricos que podem ter interesse na aprendizagem, ao mesmo tempo que se referem, brevemente, algumas das etapas que permitiram esclarecer a relação entre o círculo e o número.

2. O CÍRCULO NA BABILÓNIA, NO EGITO E NA GRÉCIA

Babilónios e egípcios (séculos 20-18 a.C.) usaram técnicas astuciosas para calcular aproximadamente a área do círculo. As suas aproximações equivalem, nas notações atuais, a usar valores de π respetivamente iguais a 3,125 e $(16/9)^2 \approx 3{,}16$, resultados que, naquelas épocas, eram suficientemente rigorosos para as aplicações desejadas. O papiro de Rhind[2], um dos mais famosos documentos matemáticos da Antiguidade, fornece indícios, no problema 48, de como os egípcios obtiveram o valor de π.

[1] Ver "O que é realmente $\sqrt{2}$?", de A. Machiavelo, *Gazeta de Matemática*, 2013, nº 169, pp. 23-24.

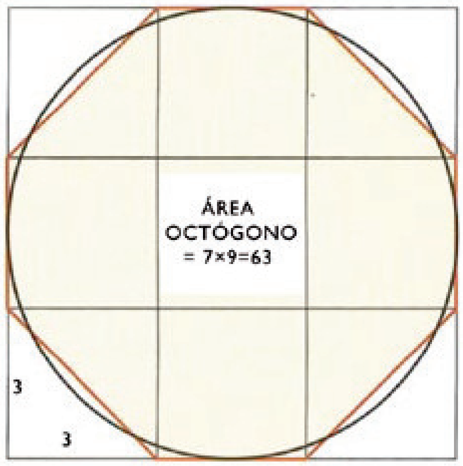

Figura 1

Considere-se um octógono (irregular) construído no interior de um quadrado com nove unidades de lado onde está inscrito um círculo (figura 1). A área deste octógono, que se obtém contando o número de partes dos quadrados de lado 3, é igual a 63. Usando a fórmula atual, $A = (D/2)^2\pi$, obtém-se para área do círculo representado na figura o valor $(9/2)^2\pi$. Considerando que essa área é ligeiramente superior à do octógono, e aproximando-a pelo valor 64, compensa-se assim a área que falta ao octógono, o que também facilita os cálculos (Delahaye, 1997). Fica então, $(9/2)^2\pi = 64$, do que resulta o valor acima referido, $\pi = (16/9)^2 \approx 3,16$.

Desde a Antiguidade até ao Renascimento que todas as aproximações de π se baseiam nesta "proximidade geométrica" já utilizada pelos egípcios. A substituição da área ou do perímetro da circunferência pelos de um polígono é uma ideia explorada por inúmeros calculadores de várias civilizações para obter resultados que equivalem, nalguns casos, a calcular π com grande aproximação, muito superior ao requerido pelas necessidades do dia a dia[3]. O rigor procurado nestas aproximações por matemáticos de várias épocas e civilizações só se justifica considerando que o cálculo de π se tornou uma finalidade em si mesma e o número π um objeto de investigação matemática. Foi na Grécia Antiga que nasceu essa forma aparentemente especulativa de trabalhar a matemática, e que atualmente se designa por "investigação".

Arquimedes (287-212 a.C.) é o cientista da Antiguidade que melhor representa o sucesso da matemática na medida do círculo. O seu resultado constitui uma grande novidade na matemática grega pois é definido por "enquadramento", uma grande ousadia no seu tempo (Jean Dhombres, 1985, p. 64), embora de prática corrente na atualidade.

Esse resultado, publicado em *A Medida do Círculo*, em notações atuais escreve-se:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \text{ ou } \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

(as frações que definem o enquadramento podem ambas ser aproximadas por 3,14)

O que é extraordinário neste resultado é que para o obter não foi usado nem cálculo algébrico nem o sistema de numeração posicional, que na época não existia. A sua importância deve-se também ao método usado, designado por "método da exaustão" (Vasconcelos, 1927, 2009, pp. 171-173) inventado por Eudóxio de Cnido (408–355 a.C.). A técnica de Arquimedes baseava-se no enquadramento geométrico da circunferência através de inscrição e circunscrição de uma sucessão de polígonos com número de lados definido pela expressão $3 \times 2^n (n = 1, 2, \dots)$, como é exemplificado na figura 2, para n=1 e n=2. Para obter a aproximação acima apresentada, Arquimedes fez o cálculo até aos termos de ordem 5, ou seja, para polígonos de 96 lados. Consideremos um círculo de raio 1 enquadrado por dois polígonos de 3×2^n lados. Sejam a_ne b_n os semiperímetros dos polígonos, respetivamente circunscrito e inscrito.

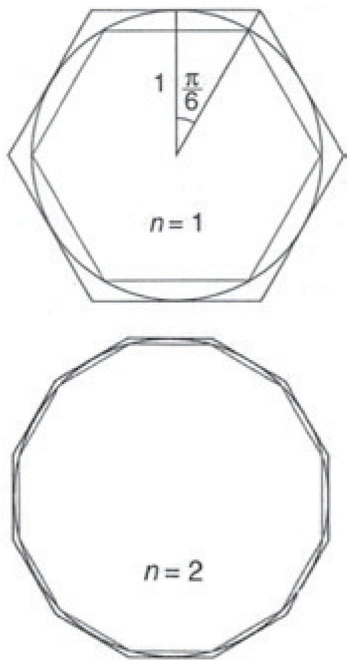

Figura 2: O círculo enquadrado por polígonos (casos n=1 e n=2).

Mostra-se facilmente que, para $n = 1$, ou seja, no caso do hexágono, $a_1 = 2\sqrt{3}$ e $b_1 = 3$.

Usando trigonometria verifica-se, pela observação da figura anterior, que para os termos de ordem n das sucessões de polígonos se tem[4]:

$a_n = 3 \times^n \tan[\pi/(3 \times 2^n)] \quad b_n)3 \times 2^n \sin[\pi/(3 \times 2^n)]$

As aproximações dadas pelo algoritmo de Arquimedes são, até aos termos de ordem 5:

$b_1 = 3$	$a_1 = 3,464101616$
$b_2 = 3,105828540$	$a_2 = 3,215390308$
$b_3 = 3,132628612$	$a_3 = 3,159659942$
$b_4 = 3,139350206$	$a_4 = 3,146086216$
$b_5 = 3,141031951$	$a_5 = 3,142714600$

Estes dados mostram que o processo de aproximações sucessivas usado por Arquimedes pode conduzir intuitivamente à noção de limite. No entanto, em Arquimedes não há qualquer sugestão de que é possível prolongar o cálculo indefinidamente, ou seja, a ideia de limite nunca é explicitada. A noção de limite pressupunha a consideração do infinito, que esteve sempre excluído da matemática grega. O formalismo matemático necessário para trabalhar com a noção de limite foi elaborado só centenas de anos depois, no quadro do cálculo infinitesimal, mas o maior incentivo e a grande inspiração para o seu desenvolvimento encontram-se, sem dúvida, nos trabalhos de Arquimedes. Efetivamente, o método da exaustão desenvolvido por Arquimedes tornou-se, no Renascimento, o modelo para o cálculo de áreas e volumes. Ainda hoje se usa um método análogo, embora adaptado aos processos de representação e de cálculo da matemática atual. A ideia de base é a mesma: para calcular a área ou o perímetro definidos por uma curva (a circunferência ou outra), substitui-se a curva por uma linha poligonal e calcula-se o espaço ou o comprimento assim definido.

O valor aproximado da área do círculo obtido por Arquimedes, sendo suficiente em muitas aplicações ainda hoje, não satisfazia no entanto as exigências de rigor da matemática grega. Mas na Grécia havia outra forma de "medir" uma figura que fugia à imprecisão do cálculo – a "quadratura" – que consistia na construção de um quadrado com a mesma área da figura dada, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Os gregos tinham métodos eficazes para realizar muitas quadraturas. Uma das mais célebres é a das lúnulas (Boyer, 1996, p. 66) conseguida por Hipócrates de Quios (séc. V a.C.) que tentou realizar também, sem sucesso, a quadratura do círculo, uma tentativa que muitos outros retomaram ao longo dos séculos. De facto, o problema atormentou os geómetras profissionais e amadores de todos os tempos até que, em 1882, se demonstrou que não tinha solução. A quadratura do círculo continuou, no entanto, a ser um problema apaixonante para os matemáticos amadores[5], que não entendiam a razão da sua insolubilidade. Essa razão prende-se com a "transcendência" de π, demonstrada por Ferdinand von Lindemann (1852-1939). A explicação do que é um número transcendente e a sua demonstração exigem conhecimentos matemáticos que ultrapassam o nível elementar, e que só poderão ser abordados nos finais do ensino secundário ou no superior.

Paralelamente às tentativas para quadrar o círculo, o desenvolvimento da matemática a partir do séc. XVII, e em particular da análise, propiciou um rigor crescente no cálculo de números irracionais, permitindo esclarecer alguns aspetos da sua natureza e acabando por conduzir aos conceitos de irracionalidade e transcendência. O problema da quadratura exata do círculo perdeu sentido, mas a outra via, a do cálculo aproximado, que Arquimedes havia inaugurado, prolonga-se até hoje através do cálculo computacional.

3. O NÚMERO π E A ANÁLISE MATEMÁTICA

O matemático francês François Viète (1540-1603) foi o primeiro, no cálculo de π, a usar uma fórmula que, embora de inspiração geométrica, já não é aproximada. É uma fórmula que usa a noção de limite e que, no limite, é exata:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$$

A fórmula continua a basear-se em polígonos, neste caso inscritos na circunferência de raio 1, e com número de lados definido por 2^n. A sua área tende para π, quando n tende para infinito.

[2] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind*

[3] Por exemplo, no século V, na China, Tsu Chung-Chi estabelece que 3,1415926 < π < 3,1415927

[4] Demonstração das fórmulas de Arquimedes presentes em Delahaye, 1997, pp.55-57.

[5] O matemático De Morgan chamou à atração por esse problema a "doença dos quadratores de círculo" ou morbus ciclometricus (*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Squaring_the_circle.html*)

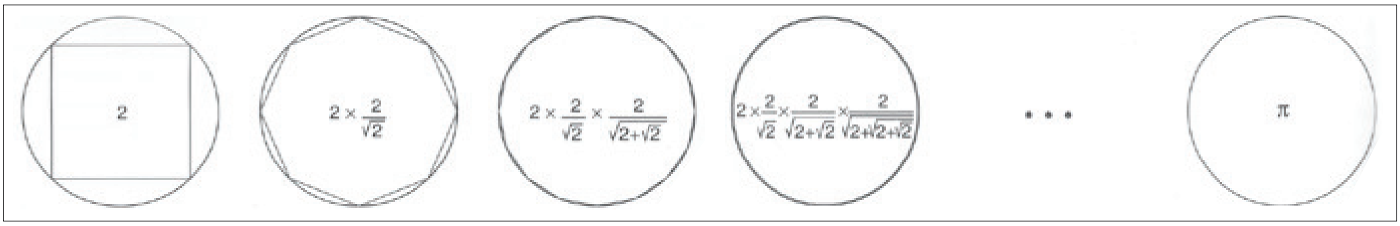

Figura 3

Podemos considerar que esta fórmula astuciosa se enquadra na história da matemática no período de transição para o cálculo. A geometria desempenha ainda um papel importante na sua elaboração mas, por outro lado, a passagem ao limite está presente. Embora recorrendo a um produto infinito, Viète não se interrogou acerca da sua convergência. Esse tipo de preocupações surgiu apenas mais tarde.

O desenvolvimento do cálculo infinitesimal propiciou o aparecimento de um grande número de fórmulas em que π é calculado a partir de séries ou produtos infinitos, já sem recurso a qualquer imagem geométrica. John Wallis (1616-1703) foi um dos primeiros autores desse tipo de expressões, de que é exemplo o produto infinito:

$$\pi = 2 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \right)$$

O matemático escocês James Gregory (1638-1675), professor nas universidades de Saint Andrews e de Edimburgo, descobriu uma série famosa pela sua simplicidade, embora seja de convergência lenta, o que a torna pouco útil do ponto de vista do cálculo de π:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

James Gregory foi um dos primeiros a especular acerca da existência dos "números transcendentes". Em 1667, tentou demonstrar, sem sucesso, que o problema da quadratura do círculo por meios algébricos é de impossível resolução.

Entre as séries cuja soma envolve o número π, uma das mais célebres, e também mais curiosas pela sua simplicidade, foi determinada por Leonhard Euler (1707-1783):

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Foi Euler quem, em 1737, adotou a notação π para designar este número. Embora tivesse sido usada pela primeira vez em 1706 por William Jones (1675-1749), só depois de Euler a ter utilizado se tornou corrente entre a comunidade de matemáticos.

De entre séries e produtos infinitos que convergem para π, uns são mais favoráveis do que outros porque convergem mais rapidamente, ou seja, para obter uma precisão determinada no seu cálculo aproximado usa-se um menor número de termos. Atualmente esse cálculo, evidentemente efetuado por computadores, permite obter uma aproximação de π muito superior ao que é necessário. De facto, para a maioria das aplicações bastam alguns dígitos de π e, mesmo em cálculos científicos onde se pretende grande rigor, nunca se usam mais do que 39 dígitos. No entanto, a procura de dígitos de π continua a fazer-se em centros de investigação de vários países, pois o seu cálculo permite testar algoritmos numéricos, ou mesmo investigar questões teóricas da matemática. Alguns dos métodos usados pelos modernos calculadores de π foram antecipados por Srinivasa Ramanujan (1887-1920), um matemático indiano com um percurso singular[6] que publicou várias fórmulas para obter π, extraordinárias pela sua elegância e rapidez de convergência. Uma delas, de uma grande simplicidade, obtida por métodos empíricos, foi usada por Ramanujan para fazer uma quadratura aproximada do círculo e permite obter π com oito casas decimais:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3,14159265\ldots.$$

O facto de existirem inúmeros métodos para calcular π é, só por si, um facto de relevância pedagógica. Essa abundância permite diferentes escolhas para diferentes situações de ensino, e, por outro lado, traduz a importância da questão do cálculo de π na matemática.

4. DA HISTÓRIA PARA A SALA DE AULA: SUGESTÕES E EXEMPLOS

Compreender o que é um número irracional exige conhecimentos matemáticos que só estão ao alcance dos alunos nos finais do ensino secundário. Mas antes disso é possível explicar-lhes o que muitos povos souberam desde a Antiguidade: o que são "aproximações racionais de um número irracional".

A ideia de que podemos substituir um valor numérico por outro não é difícil de exemplificar, pois basta usar uma divisão, por exemplo de 1 por 3, e substituir a dizima por um valor aproximado. Ganhar a sensibilidade de um jovem para essa simplificação é um passo essencial na construção da ideia de aproximação.

A história da matemática proporciona inúmeros exemplos de aproximações de π que podem ser escolhidos pelo professor de acordo com diferentes turmas e diferentes contextos. Desde a Antiguidade até aos primórdios da matemática moderna, a associação entre a geometria e o número π, em particular, deu origem a um vasto leque de construções e exercícios adequados aos vários níveis de ensino. Em níveis elementares, poderão ser utilizadas aproximações muito simples e acessíveis. Os que se seguem foram selecionados entre os propostos num trabalho mais longo (Sousa, 2013), por poderem ser apresentados de forma breve e sucinta, e também, por serem adequados a alunos até ao 9º ano.

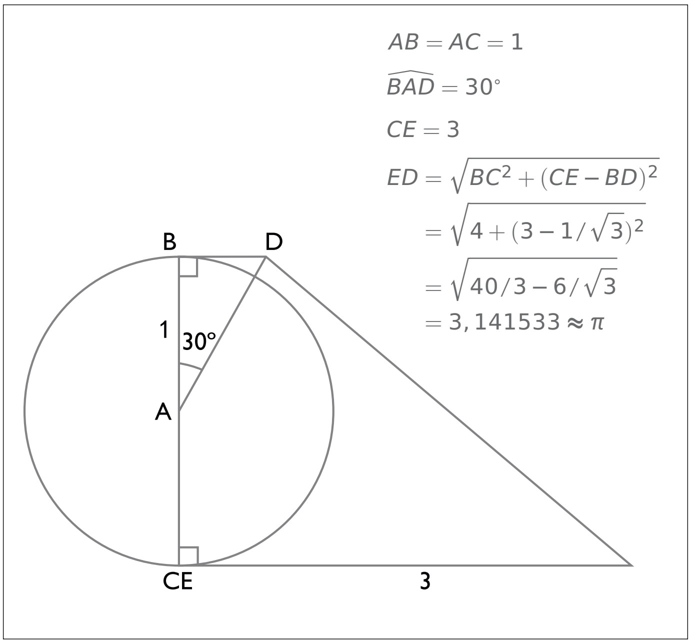

Figura 4: Método de Kochansky (1685).

A construção egípcia já referida é uma das mais fáceis de realizar. Gaspar e Mauro[7] apresentam, para a fórmula que lhe está associada, $A = \left[\left(\frac{8}{9}\right) D\right]^2$, explicações baseadas em conhecimentos sobre a cultura egípcia e que encontraram em textos de história da matemática e de etnografia da matemática. Essas diferentes explicações "fornecem uma quantidade de materiais e métodos que podem ser utilizados em sala de aula na discussão do cálculo da área do círculo"[8].

É possível obter retificações simples da circunferência, ou seja, traçar um segmento cujo comprimento é próximo do seu perímetro. A construção de Adam Kochansky (1631-1700), ver figura 4, permite obter π com seis casas decimais exatas, mas para o calcular é necessário usar o Teorema de Pitágoras e raízes quadradas.

Esta construção pode ser usada em sala de aula e proporcionar familiaridade com um problema célebre que contribui para entender e concretizar a questão da aproximação de π.

Em "números e geometria", capítulo incluído numa obra coletiva (Bouvier, 1986, pp. 237-248) e no qual se usa também a ideia de retificação, Fernand Lemay propõe que se verifique experimentalmente que π está bastante próximo de 22/7, fazendo rodar um círculo de diâmetro 1 sobre uma reta e mostrando que, após sete voltas, se atinge um ponto próximo de 22, como é esquematizado na figura 5 (Bouvier, 1986, p. 242).

Uma roda de bicicleta e uma linha branca de campo desportivo podem ser úteis para o processo. Com uma moeda e uma folha de papel, a experiência é possível mas mais delicada. Um material que facilitaria o procedimento numa experiência em sala de aula seria, por exemplo, um carrinho de linhas, ou um cilindro de pequenas dimensões.

Este exercício destaca-se pela sua simplicidade, mas também porque está associado a uma experiência. O "ensino experimental", embora nem sempre permita obter resultados muito precisos, pode ser um importante fator de motivação para os alunos.

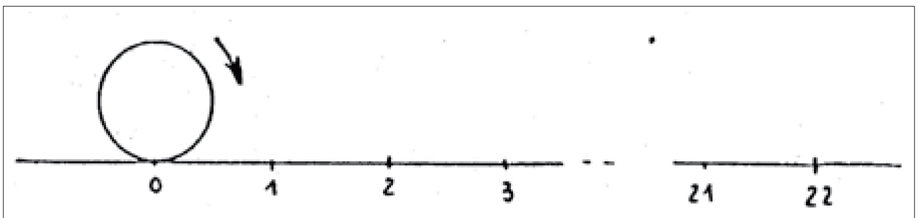

Figura 5: Esquema do procedimento para verificação do valor de π.

[7] Gaspar, M.T. e Mauro, S. (2004). Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática, VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. (U.F.P.; S.B.E.M) *http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf*, pp. 9-16

[8] Idem, pp. 9-10

A oportunidade de usar a via experimental surgiu no seguimento de um trabalho sobre a interação de história e ensino da matemática (Sousa, 2013, pp.71-83), e foi concretizada através de um projeto envolvendo duas turmas do 5º ano do Ensino Básico. O seu objetivo consistiu na determinação experimental da razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, P/D.

Partindo da definição de perímetro, diâmetro e raio, foi proposto aos alunos que traçassem na sua folha de registos circunferências com medidas de raio/diâmetro definidas, e que depois medissem os seus perímetros, sobrepondo um cordel nas circunferências e utilizando uma régua. As medições foram registadas numa tabela, bem como o respetivo cálculo da razão P/D.

Em seguida, os alunos foram questionados sobre quantas vezes caberá, aproximadamente, a medida do diâmetro dentro da medida do perímetro de um círculo e depois incitados a verificar a resposta, usando exemplos e o material já utilizado.

Após esta pequena experiência, chamou-se a atenção dos alunos para a imprecisão dos valores obtidos nos seus cálculos das razões P/D e fez-se referência ao erro experimental. Sugeriu-se que, utilizando o menor e o maior valor das razões registadas, os diferentes grupos procedessem a um enquadramento de π. Depois, utilizaram-se os enquadramentos obtidos para abordar a questão das aproximações do número π, em particular pelo valor 3,14.

Numa segunda fase da experiência, os alunos escolheram alguns objetos com forma cilíndrica, dentro e fora da sala de aula, para realizar medições e calcular a razão P/D, efetuando os respetivos registos numa tabela semelhante à inicial. Compararam-se as duas tabelas e discutiram-se as causas das suas diferenças e semelhanças.

Na conclusão da atividade apresentaram-se algumas informações sobre os números irracionais, as dízimas infinitas, e também sobre o número π, a sua história e as suas aproximações mais interessantes para este nível de ensino.

O objetivo desta atividade é proporcionar um conhecimento "experimental" de que P/D tem sempre aproximadamente o mesmo valor, e não obter a verificação rigorosa desse facto. A tarefa possibilita, contudo, que o aluno vá experimentando e observando que os valores obtidos são diferentes mas, ainda assim, próximos do valor de π.

O exercício não permite, evidentemente, explicar o que é um número irracional, mas apenas fazer perceber que há uma razão constante entre perímetro e diâmetro, um conhecimento que existia já nas civilizações egípcia e babilónica. Esta ideia, que podemos considerar já abstrata e complexa, e é ensinada no 5º ano de escolaridade apenas "teoricamente", torna-se mais concreta e real através da experimentação. Mas a experiência deve ser complementada com a discussão da falta de rigor do método, e também com a da validade da aproximação dos valores de π encontrados, discussão na qual o professor desempenha um papel fundamental.

5. CONCLUSÃO: A DEFINIÇÃO RIGOROSA DE π, A HISTÓRIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A descoberta de que existem segmentos geométricos incomensuráveis, embora não esteja associada a uma data precisa, parece estar relacionada com a aplicação do Teorema de Pitágoras, pelos próprios pitagóricos, ao triângulo retângulo isósceles (Boyer, 1989, p. 72). Na matemática grega eram conhecidos outros segmentos e também áreas e volumes incomensuráveis ou, como dizemos atualmente, cuja medida é dada por um número irracional. Alguns autores defendem a ideia de que as dificuldades conceptuais criadas pela existência dos incomensuráveis impediram, na Grécia, o desenvolvimento do cálculo, uma área onde a prática aparecia associada à falta de rigor (Boyer, 1989, p. 117). No entanto, mesmo reconhecendo a impossibilidade de traduzir por números as medidas dos incomensuráveis, a que chamavam "grandezas", os gregos souberam enunciar as suas propriedades, construindo uma "teoria das proporções" que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis (Dieudonné, 1990, p. 79). Esta teoria, elaborada por Eudóxio e apresentada no livro V dos *Elementos* de Euclides, foi durante mais de dois mil anos a única base para lidar com os números irracionais, até Richard Dedekind (1831-1916) se debruçar sobre o assunto, no séc. XIX.

Dedekind construiu a noção de número irracional a partir da natureza da continuidade de uma grandeza geométrica. Introduzindo o conceito de "corte", elaborou uma definição com base na teoria de números, mas que assenta num conceito intuitivamente aceitável. Ao observar que um ponto divide uma reta em duas partes, foi conduzido para o que considerou como sendo a essência da continuidade (Sousa, 2013, p.11). As construções dos números reais de Charles

Méray (1835-1911) e de Karl Weierstrass (1815-1897) foram elaboradas na mesma época e, tal como no caso de Dedekind, o ensino foi a sua principal motivação.

A definição rigorosa dos números irracionais proporcionou, evidentemente, o fundamento indispensável ao cálculo com essas grandezas, mas a sua ausência não influenciou o cálculo nem as técnicas de aproximação numéricas, que definiram um percurso autónomo ao longo da história, dando origem a inovação e conhecimento matemático. Por outro lado, essa prática, mesmo não fundamentada no conhecimento rigoroso dos números irracionais, foi propiciando a compreensão da sua natureza, ou seja, ao trabalhar com objetos que não estavam definidos rigorosamente os matemáticos passaram a conhecê-los melhor. O mesmo pode acontecer com um aluno que precisa de usar os números e não é ainda capaz de compreender perfeitamente a sua natureza.

Noutras matérias da matemática é também possível estabelecer paralelismos entre o trajeto de aprendizagem e o da história, e usá-los com proveito. Mas a utilização da história tem ainda mais interesse no caso do número π, pois sendo o primeiro irracional a ser formalmente introduzido no ensino básico, envolve conceitos difíceis de transmitir e compreender, principalmente em níveis elementares. Em particular, o percurso de alguns matemáticos no estudo dos números poderá ser uma fonte de recursos para o professor explorar. De facto, as dificuldades e dúvidas por eles encontradas ao longo da história, assim como os processos usados para as ultrapassar, propiciam pistas e soluções interessantes para introduzir ou desenvolver conceitos, mesmo em níveis elementares de aprendizagem. E quase sempre, mesmo no caso de alunos com algum tipo de preconceitos relativamente à matemática, a abordagem histórica torna a disciplina mais aliciante, efeito que pode ser reforçado por outros fatores como, por exemplo, a articulação com outras disciplinas.

REFERÊNCIAS

Boyer, C. (1968, 1989), *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, U.S.A.

Bouvier, F. (coord.) (1986) *Didactique des Mathématiques*

Delahaye, J.P. (1997), *Le Fascinant Nombre Pi*, Ed. Belin, Pour la Science Paris.

Dhombres, J. (1985), "Archimèdes in Le matin des mathématiciens. Entretiens sur l'histoire des mathématiques", Ed. Belin, Pour la Science Paris

Dieudonné, J. (1990), *A Formação Matemática Contemporânea*, Ed. D. Quixote, Lisboa, (Edição original, Hachette, 1987)

Sousa, L. (2013), "Números Reais: História e Didática", dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, FCUL.

Vasconcellos, F. A. (1927), *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand. (Reeditado pela Ludus em 2009).

SOBRE OS AUTORES

Isabel Serra é professora auxiliar aposentada da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e lecionou no Departamento de Matemática e na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências. É investigadora do Centro Filosofia das Ciências da UL, onde realiza investigação em história e filosofia da física e da matemática.

Luísa de Sousa é docente do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, tendo exercido funções em várias escolas da rede de estabelecimentos do Ensino Público. A produção do artigo surgiu na sequência do tema desenvolvido na sua dissertação do curso de mestrado Matemática para Professores, ministrado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.