No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FENDA **HIPERBÓLICA**

Um módulo expositivo de Matemática para o exterior.

Em Março de 2000, por ocasião do Ano Internacional da Matemática, o Atractor, criado menos de um ano antes, foi convidado para conceber e realizar uma exposição temporária, prevista para quatro a seis meses, dedicada à Matemática, que viria a ser inaugurada em Novembro daquele ano no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, sob a designação de "Matemática Viva". Tratou-se, segundo a informação na altura prestada pelo Ciência Viva, da primeira exposição concebida e construída de raiz inteiramente no nosso País, tendo as outras já lá existentes sido compradas a instituições estrangeiras de renome. Na "Matemática Viva", foi pensado para o exterior do Pavilhão um módulo expositivo, que seria visível pelas pessoas que passavam no local, mesmo aquelas que normalmente não têm o hábito de visitar um museu ou uma exposição. Queria-se um módulo que tivesse impacto junto de um público não especializado e a escolha recaiu em algo que aqui designaremos por Fenda Hiperbólica. A "Matemática Viva" viria a estar no Pavilhão do Conhecimento durante cerca de 10 anos, em vez dos seis meses inicialmente previstos [1]. Quanto à Fenda Hiperbólica, continuaria no mesmo local (figura 1) mais cerca de três anos, tendo passado no

Figura 1

[1] Essa mudança de escala na duração da exposição deveu-se ao que na altura foi classificado pelo Ciência Viva como um grande sucesso; ainda segundo a mesma fonte, a exposição teve mais de dois milhões de visitantes.

Figura 2

Figura 3

verão de 2013 para as arcadas do edifício da Universidade do Porto (figura 2), na Praça Gomes Teixeira.

O módulo, resguardado num cubo com mais de dois metros de lado e paredes laterais de vidro, é constituído por duas hastes retilíneas inclinadas, presas numa placa circular que gira continuamente em torno de um eixo vertical (ver figura 3 e animação em [1]). Sobre uma das diagonais da base quadrada existe uma grande placa retangular vertical, de aço, placa essa que tem apenas duas ranhuras curvas. Parece evidente a priori que as duas hastes retilíneas nunca poderão passar pelas fendas curvas sem roçarem nos seus bordos. O aspeto inesperado para o observador desprevenido e que cria o efeito espetacular do módulo é a descoberta de que esta "óbvia" impossibilidade não é real: o observador assiste, dir-se-ia com *suspense* e surpresa, à passagem das hastes retilíneas sem tocarem nos bordos da fenda curva.

Ao longo destes anos, presenciámos as reações de muitos observadores e pudemos verificar que a surpresa e o *suspense* também ocorreram muitas vezes em pessoas com uma preparação matemática de nível universitário, que nunca tinham pensado nesta situação concreta. Com a vinda do módulo para o Porto, algumas pessoas nessas condições testemunharam o fascínio que lhes causara o módulo que tinham visto em Lisboa, sem nunca se terem apercebido de que a autoria era do Atractor. E qual a reação dos observadores, constituindo a maioria da população, sem nenhuma preparação matemática específica? A primeira indicação positiva de que, mesmo para essas pessoas, o módulo iria cumprir a sua função – de despertar a curiosidade e a reflexão sobre as razões geométricas do seu comportamento – foi-nos dada antes mesmo da sua construção. Durante a primeira entrevista com o serralheiro que viria a construir o módulo, um excelente profissional do setor, foi manifestada uma certa incredulidade relativamente ao comportamento final que estava a ser previsto e a reação foi mais ou menos esta: "Eu faço, mas não tomo a responsabilidade de que funcione como está a ser descrito." A segunda entrevista ocorreu na manhã seguinte e a reação foi aproximadamente esta: "Estive a pensar e já acredito que possa funcionar como descreveu..." Este *volte-face* deu-se sem acesso a nenhum desenho especial, nem apoio de qualquer espécie de módulo virtual ou de uma animação do género das hoje existentes, muito

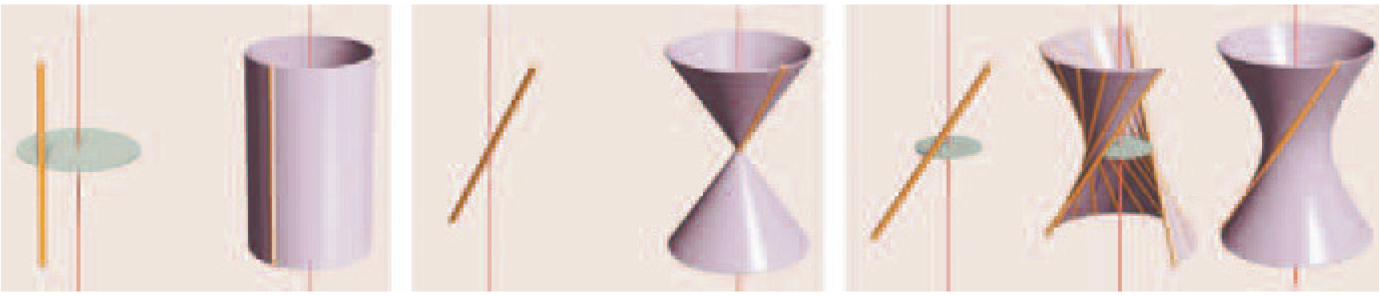

Figura 4

menos com recurso a meios matemáticos; deu-se porque a incredulidade inicial provocou curiosidade e levou a uma reflexão suficiente para descobrir a razão do comportamento esperado. Para quem se dedica à divulgação matemática, conseguir este tipo de reação é certamente aquilo a que mais pode aspirar ao conceber um módulo[2].

Qual a matemática envolvida? Imaginemos uma reta vertical (fixa) e outra reta rodando em torno da primeira. Há três possibilidades distintas: as duas retas são paralelas, concorrentes ou nem uma coisa nem outra (ver figura 4). No primeiro caso, reunindo os pontos de passagem da reta móvel, obtemos um cilindro – o cilindro de revolução gerado pela reta móvel girando em torno da reta fixa. No segundo caso, temos um (duplo) cone de revolução, com vértice no ponto de encontro das duas retas. O terceiro caso é o que nos interessa: a superfície gerada é um hiperbolóide de revolução. Podemos garantir que nenhuma das posições da reta móvel leva a pontos fora do referido hiperbolóide. Então, se, no caso do nosso módulo, intersetarmos essa superfície com o plano diagonal acima referido, nenhuma posição da reta móvel terá pontos fora da curva obtida pela interseção do plano com o hiperbolóide. Assim, abrindo uma ranhura na placa vertical à volta dessa curva (ver figura 5), em nenhuma posição a reta móvel toca no resto da placa. Por outras palavras, a haste móvel passa pela ranhura. E que curva é esta? Trata-se de uma hipérbole.

Esta apresentação com recurso ao hiperbolóide gerado pelas hastes em movimento é a forma mais natural e elegante de apresentar o funcionamento e o tipo de curva obtido para ranhura. Se quisermos prescindir do uso explícito do hiperbolóide descrito, podemos provar diretamente que a curva interseção da haste móvel com a placa vertical é uma hipérbole. Para tal, podemos partir da caracterização da hipérbole como lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixados nesse plano tem módulo constante.

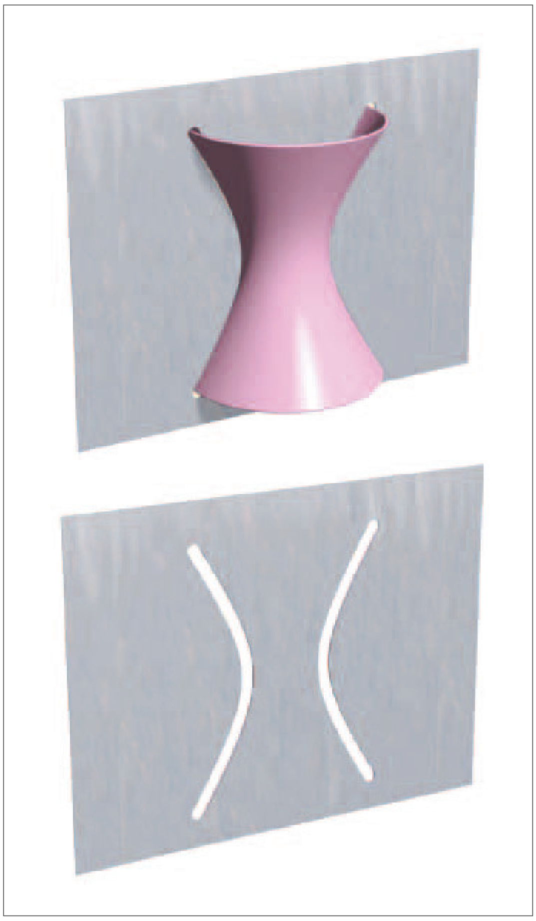

Figura 5

[2] Durante o período de construção, o módulo funcionou como uma espécie de *ex-libris* da oficina e era mostrado e explicado aos clientes de passagem.

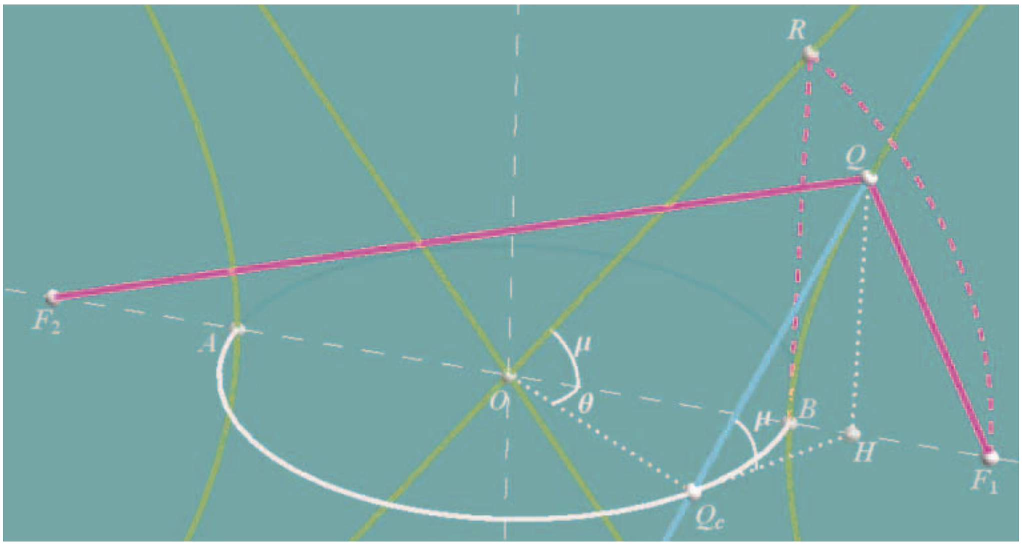

Figura 6

No caso que nos interessa, comecemos por verificar essa constância usando trigonometria. O ponto Q_c da haste à distância mínima do eixo descreve uma circunferência que interseta o plano da placa vertical em dois pontos, A e B (ver figura 6); designando por μ o ângulo (constante) da haste com o plano horizontal, consideremos as retas na placa vertical passando pelo ponto médio O de AB que fazem um ângulo μ com o plano horizontal e designemos por R um dos pontos de interseção de uma dessas retas com a vertical passando por B. A circunferência do plano vertical de centro O e passando por R interseta o plano horizontal da circunferência mínima em dois pontos F_1 e F_2, simétricos relativamente a O.

Designando por Q o ponto de interseção da haste com a placa vertical, queremos provar que $||QF_2 - QF_1||$ se mantém constante durante o movimento da haste, isto é, não depende do ponto Q_c, ou, o que é o mesmo, do ângulo $\theta (= BOQ_c)$. Se r designa o raio da circunferência horizontal mínima e H a projeção horizontal de Q, da análise da figura resultam facilmente as igualdades:

$$|Q_cH| = r \,\mathrm{tg}\, \theta,$$

$$|HQ| = r \,\mathrm{tg}\, \theta \,\mathrm{tg}\, \mu,$$

$$|OH| = r \sec \theta,$$

$$|OF1| = |OR|\, r \sec \mu,$$

$$|HF_1| = |r(\sec \mu - \sec \theta)|.$$

$$|HF_2| = |r(\sec \mu + \sec \theta)| \text{ e}$$

$$||QF_2| - |QF_1|| = |r \sqrt{(\mathrm{tg}^2\theta \,\mathrm{tg}^2\mu + (\sec\theta + \sec\mu)^2)} - r\sqrt{\mathrm{tg}^2\theta \,\mathrm{tg}^2\mu + (\sec\theta - \sec\mu)^2}\,|$$

Pode-se verificar que o segundo membro pode ser escrito na forma seguinte:

$$||QF_2| - |QF_1|| = r\,|\sqrt{\frac{(1+\cos\theta\cos\mu)^2}{(\cos\theta\cos\mu)^2}} - \sqrt{\frac{(1-\cos\theta\cos\mu)^2}{(\cos\theta\cos\mu)^2)}}\,| = 2r,$$

valor que não depende de θ, como queríamos concluir, nem aliás de $\mu \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Se o leitor prefere uma demonstração mais geométrica de que a curva obtida para fazer as ranhuras é realmente uma hipérbole, poderá ver a que se indica em [1] ou, melhor ainda, procurar descobrir uma outra justificação que exija menos contas...

O leitor poderá ainda encontrar em [1] animações interativas, com as quais pode, por exemplo, variar continuamente a inclinação da reta vendo como a fenda vai mudando a excentricidade (poderá ter de importar da rede os *plugins* para *shockwave* e *Mathematica*). Também encontrará filmes mostrando o módulo real em funcionamento.

[1] *http://www.atractor.pt/mat/FendaHiperbolica*