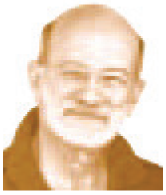
CANTO DÉLFICO



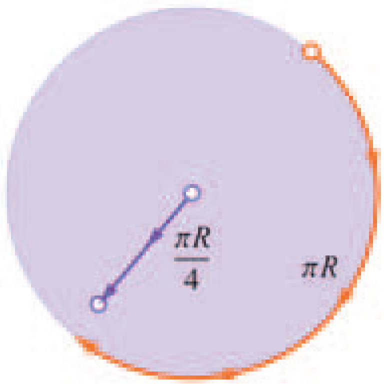
Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

JOGOS DE CERCO E FUGA

Os problemas de perseguição e fuga são dos mais populares e estudados na teoria dos jogos, tendo o desenvolvimento intenso da sua análise sido, infelizmente, suscitado e pago pelos jogos de guerra. Perseguição, cerco, sítio, sequestro, às vezes sinónimos, foram e são manifestações da agressividade humana praticadas desde tempos imemoriais. Neste *Canto*, descrevemos versões aparentemente mais benignas e divertidas, com pseudónimos de animais pouco simpáticos também.

A SENHORA DO LAGO

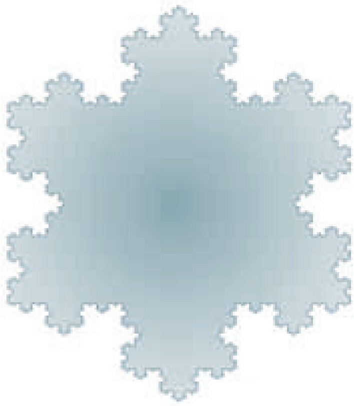
O primeiro problema deste *Canto* é bem conhecido e tem muitos anos de idade. Vi-o pela primeira vez num artigo de Rufus Isaacs [1], o pioneiro dos jogos ditos diferenciais, nos quais os contendores escolhem trajetórias num meio contínuo em vez de escolherem opções de um conjunto finito de possibilidades como nos jogos tradicionais de tabuleiro, Xadrez, Go, Nim, etc. Do problema de Isaacs retira-se a seguinte versão simplificada: no centro duma piscina circular nada uma banhista que se vê surpreendida pela presença dum cavalheiro com intenções pouco recomendáveis. Ele desloca-se na fronteira da piscina, esperando apanhá-la mal ela ponha os pés em terra. Para azar dela, ele pode mover-se na fronteira a uma velocidade máxima 4 vezes superior ao máximo da sua velocidade na água. Para sorte dela, ele não está interessado em molhar os pés e, correndo os dois em terra, ela é bem mais veloz do que ele. *Terá ela uma estratégia para escapar ao cerco?*



Supondo serem v e W as velocidades máximas da banhista na água e do predador em terra, o parâmetro $p = W/v$ é fundamental no problema e o valor $p = 4$ prescrito não é inocente. A estratégia óbvia da banhista é fugir a todo o gás do centro ao ponto da circunferência diametralmente oposto ao que o indivíduo ocupa no instante inicial da fuga; para a apanhar, ele terá de correr π vezes a distância por ela percorrida. Se for $p = 3$, ela escapa, obviamente. Com $p = 4$ essa estratégia não serve (como a figura mostra) e a ajuda do leitor torna-se indispensável. É intuitivamente óbvio, mas exige de si uma prova, pois p é "muito grande", a banhista não tem meio de escapar: rende-se ou fica eternamente de molho. Isto mostra a existência dum número real c, chamado *parâmetro crítico da piscina*, tal que: se $p < c$ ela pode escapar, se $p > c$ ele pode cercá-la para sempre. A questão agora é estimar o valor de c:

Será $c > 4$? Será $c < 5$?

Pede-se ao leitor que comprove estas estimativas mediante estratégias de uma ou de outra das partes em conflito e que descubra melhores estimativas.



É natural que, para piscinas de forma não circular, com o predador confinado à fronteira, o parâmetro crítico tenha valores diferentes. Um caso interessante é o das piscinas em forma de floco de neve, a famosa ilha de Koch, recomendada para banhistas lentos. É que, na fronteira fractal, o *cavalieri* fica sempre entalado por muito lesto que seja. *Porquê?*

UMA FÁBULA DISCRETA

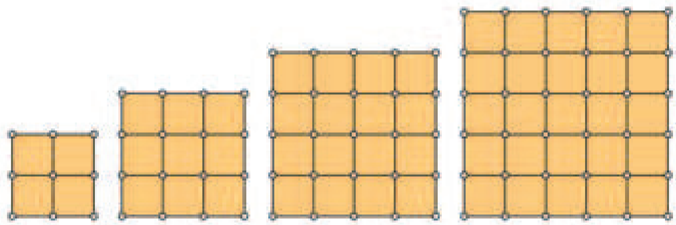
Uma das dificuldades da banhista, do cavalheiro e do leitor que queira ajudá-los é o facto de a piscina ser um meio contínuo, onde os contendores podem descrever curvas planas de grande complexidade. Podemos conceber versões em tempo discreto desse problema admitindo estratégias combinatórias de perseguição e fuga. Eis uma possibilidade: o lago é agora um tabuleiro de xadrez $n \times n$ cujas casas são quadradinhos de lados de comprimento 1. A banhista é substituída por uma pulga e o predador é substituído por um escorpião, que vão jogar uma partida a dois de cerco e fuga. É dado um real positivo p que não muda até ao fim do jogo. A pulga ocupa um dos nodos do tabuleiro, saltando de um nodo para outro em cada jogada. O escorpião arrasta-se continuamente sobre a fronteira do tabuleiro e pode ocupar qualquer ponto dessa fronteira (não apenas os $4n$ nodos periféricos). Em cada jogada da pulga, ela tem de desocupar o nodo em que se encontra e saltar para um dos nodos adjacentes a esse; cada jogada do escorpião consiste em arrastar-se sobre a linha periférica, podendo percorrer qualquer distância $\leqslant p$.

Na primeira jogada, a pulga ocupa um nodo inicial à sua escolha; depois, o escorpião ocupa um ponto da fronteira à sua escolha; a seguir, a pulga salta; depois, o escorpião arrasta-se, etc., jogando alternadamente.

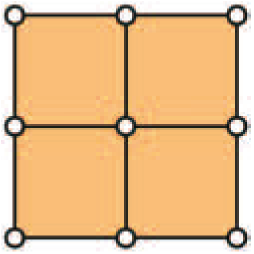
QUEM GANHA? Diz-se que a pulga *escapa* e *ganha* a partida se salta para um nodo periférico aonde o escorpião não pode chegar na jogada seguinte. Se ela se coloca num nodo periférico que o escorpião também ocupa na jogada seguinte, ele *ganha.*

Falta saber o que faz o árbitro se a pulga nunca jogar para um nodo periférico, prolongando assim o jogo indefinidamente. Um tal impasse pode dever-se à falta de interesse da pulga em escapar ou deixar-se comer; resta determinar que mérito poderá ter o escorpião numa situação dessas. Declaramos o escorpião como *vencedor*, se ele mostrar um algoritmo que impossibilita o escape da pulga. Claro que isto supõe a intervenção dum escorpião matemático que conceba algoritmos e dum árbitro matemático que os analise. Será essa a função do leitor nos exemplos seguintes.

PARÂMETRO CRÍTICO. Fixado n, admitamos que os dois contendores jogam o melhor possível. Claro que, para p suficientemente grande, o escorpião ganha e, para p suficientemente pequeno, ganha a pulga. Portanto, existe um número real c_n, chamado *parâmetro crítico* do tabuleiro $n \times n$, definido pela propriedade: para $p < c_n$ ganha a pulga, para $p > c_n$ ganha o escorpião. Para cada n temos, pois, um problema: determinar o valor de c_n. E mesmo que não consigamos determinar c_n, podemos procurar números α e β tais que $\alpha \leqslant c_n \leqslant \beta$; a prova de $\alpha \leqslant c_n$ faz-se inventando uma estratégia de escape da pulga; a prova de $c_n \leqslant \beta$ faz-se inventando um algoritmo de cerco eterno por parte do escorpião.

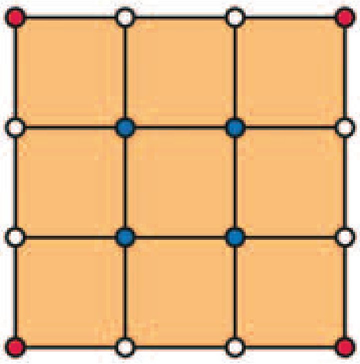


EXEMPLOS E PROBLEMAS



Caso $n = 2$.

Num tabuleiro tão pequeno não há estratégias complicadas. Para qualquer n, se a pulga escolhe no início um nodo periférico, o escorpião come-a logo. Assim, no tabuleiro 2×2, cada partida dura uma ou duas jogadas para cada lado. Deixo ao leitor a determinação do parâmetro crítico c_2.



Caso $n = 3$.

Se $p = 3$, o escorpião tem uma estratégia simples de cerco eterno à pulga. Na primeira jogada ela escolhe um dos nodos centrais, a azul. O escorpião coloca-se no canto do tabuleiro mais próximo da pulga. Para cada salto da pulga para um nodo azul, ele arrasta-se para o canto mais próximo dela. Assim ela não escapará. Note que há outras estratégias parecidas com esta. Se alterássemos levemente uma das regras do jogo estipulando que

> $(^*)$ *em cada jogada, o escorpião pode percorrer uma distância* inferior a 3,

o escorpião não poderia numa só jogada ir de um canto ao outro do tabuleiro, o que torna inexequível a estratégia acima delineada. Esta limitação sugere novo problema

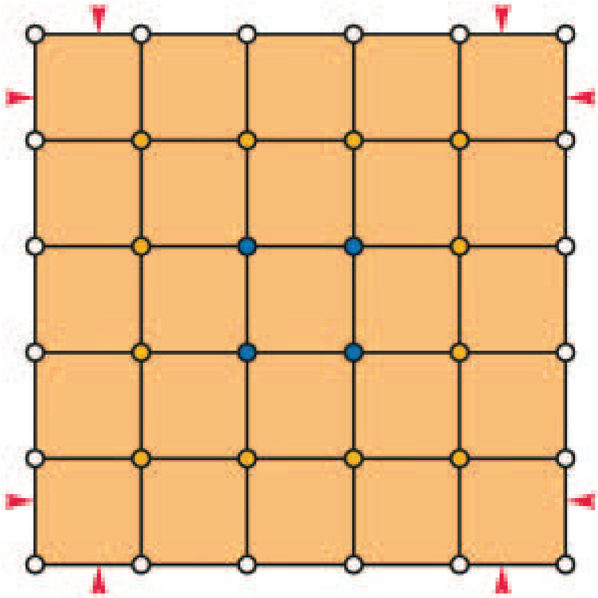
> *Será que a regra* $(^*)$ *confere à pulga uma estratégia de escape?*

O cálculo do parâmetro crítico no caso 4×4 dar-lhe-á rodagem para tratar problemas mais gerais. Eis uma proposta simples:

> *Prove que, se* $n \neq 4$ *e* $p \leqslant 3$*, a pulga tem estratégia para escapar.*

DE CARAS. Tomamos $p > 3$, a partir de agora. Ao escorpião convém tirar vantagem duma manobra, inspirada nas pegas *de caras* e *de cernelha* do cerco ao touro, que consiste em acorrer aos pontos periféricos mais próximos do nodo em que está a pulga. Para exemplificar, considere-se o tabuleiro 5×5, a seguir. Parece não valer a pena à pulga deslocar-se para um nodo amarelo, a não ser que possa saltar de imediato para a periferia e fugir.

Admitamos que ele está no canto noroeste do tabuleiro e ela salta para o amarelo a nordeste; o escorpião ataca de cernelha correndo o mais que pode para este e, se ela se mantiver nos amarelos, ele pôr-se-á de caras em 3 ou menos jogadas; e poderá manter-se de caras até ela recuar para um nodo azul. O posicionamento de caras deve preparar-se à distância: se a pulga salta para o nodo azul a noroeste, ao escorpião convém dirigir-se a um dos lados norte ou oeste, claro, mas as táticas são mais subtis quando se joga nas imediações do parâmetro crítico.



Caso $n = 5$. Trata-se do primeiro caso menos fácil. Não se dá solução completa mas apenas um diagrama que ilustra a determinação do parâmetro crítico. As setinhas vermelhas na periferia do tabuleiro apontam *pontos-chave* para conceção de estratégias da pulga e do escorpião, quando p está nas imediações do parâmetro crítico. O escorpião pode arrastar-se de cada um deles para cada um dos seus dois vizinhos em apenas uma jogada. Descobri-los foi complicado, utilizá-los é bem interessante, como o leitor verificará tentando determinar matematicamente o parâmetro crítico.

FUGA À ETERNIDADE

Ser árbitro duma partida destas não é fácil, especialmente no caso em que o escorpião ganha sem comer a pulga; aí é preciso analisar um algoritmo publicado pelo escorpião, onde ele clama: *a pulga não escapará!* Teremos um problema se o árbitro for um burocrata com a única função de registar cada posição da partida, no estilo do Xadrez: *"Jogada k: a pulga salta para o nodo X e o escorpião desloca-se para o local Y"*.

Será possível, apenas com esse registo, e com razoável justiça!, declarar a vitória do escorpião mesmo que a pulga não se deixe comer?

Talvez ajude a regra seguinte, inspirada numa das cláusulas de empate no Xadrez:

X. *O escorpião vence se a pulga dá um salto após o qual a posição atingida repete uma posição anterior da partida.*

Veja bem as dificuldades adicionais que isto levanta a ambos os contendores. Para a pulga, o arrependimento e o tentar de novo podem sair caros. A seu favor, o escorpião tem uma infinidade de locais onde parar, mas a cláusula X obriga-o a visitar os mesmos locais frequentemente, para que a pulga venha a repetir uma posição anterior da partida. O último problema deste *Canto* consiste em saber se sim ou não

> *Tendo o escorpião um algoritmo de cerco eterno da pulga, ele tem também um modo de a obrigar a repetir posições.*

Experimente resolver esta questão no caso concreto $n = p = 3$, com a regra $(^*)$ acima referida, que deixa o escorpião deslocar-se uma distância *inferior a* 3. Curiosamente, a resposta é negativa: se a pulga circular nos nodos azuis sempre no mesmo sentido, para suster o escape da pulga, o escorpião não pode visitar por duas vezes o mesmo local. Portanto, o árbitro burocrata nunca lhe dará crédito num cerco perpétuo óbvio.

NOTAS FINAIS

Pelos meus cálculos, o parâmetro crítico da piscina circular é $c = 4.60333884\ldots$

Numa piscina de fantasia em floco de neve, qualquer segmento da fronteira tem comprimento infinito. Ao *cavalieri* acontece o que há muito tempo devia ter feito: ficar quieto e andar parado.

Na invocação de existência dos parâmetros críticos foi tido como intuitivamente óbvio que se a pulga não tem estratégia de escape, então o escorpião tem um algoritmo de cerco eterno. A supressão dessa lacuna fica para o leitor atento.

Com a regra $(^*)$ a pulga também não se safa.

Para todo o n, a regra que permite ao escorpião deslocar-se de uma distância $\leqslant p$ pode alterar-se, como em $(^*)$, para $< p$, o que conduz a problemas distintos. Será interessante determinar, em ambos os casos, quem tem estratégia de vitória no caso $p = c_n$.

BIBLIOGRAFIA

R. Isaacs, "Differential Games: Their Scope, Nature, and Future", *J. Optim. Th. Appl.*, 3(1969), pp. 283-295.

E. Marques de Sá, A. Branquinho, A. Gonçalves, "Olimpíadas de Matemática da Lusofonia/Banco de Problemas/Enunciados e Respostas", DMUC, 2011.