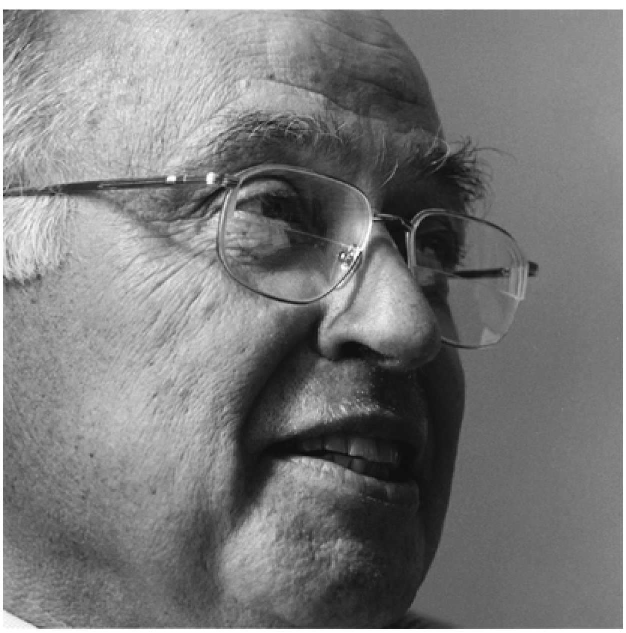
A Matemática no Século XX

Sir Michael Francis Atiyah



Sir Michael Atiyah (fotografado por Mark Atkins)

A matemática interessa-me; falo, aprendo, discuto e, depois, questões interessantes simplesmente emergem. Nunca comecei com um objectivo específico, a não ser o de compreender a matemática.[1]

Palavras de Michael Francis Atiyah, um dos grandes senhores da matemática do século XX. Com contribuições notáveis e fundamentais em áreas que envolvem a geometria, a topologia e a análise, muitas foram as honras que recebeu. Ganhou, por exemplo, a *Fields Medal* em 1966 e o *King Faizal Prize* em 1987.

I. M. Singer, Raoul Bott, F. Hirzebruch, Nigel J. Hitchin, outros grandes matemáticos, são alguns dos seus colaboradores e, entre os seus descendentes matemáticos, contam-se Simon Donaldson, *Fields Medal* em 1986, Frances Kirwan[2], G. Lusztig e G. B. Segal. São deste último as palavras:

...deixava-nos sempre com um sentimento de que havia alguma coisa importante que podíamos fazer; por mais erradas que fossem as ideias que tínhamos, nunca nos destruía mas fazia com que a nossa confusão parecesse ser um passo na direcção correcta. Tenho pensado muitas vezes sobre esta maravilhosa capacidade de encorajar, e em como é difícil de imitar, quando me vejo a ter o efeito exactamente oposto nos meus próprios estudantes.

ou, num registo mais divertido,

Entre os conselhos menos ortodoxos que dava aos seus estudantes, nos meus tempos, estava "Nunca leiam nada. Só vos vai deprimir. Se precisarem de saber alguma coisa perguntem-me."[3]

---

[1] *"An Interview with Michael Atiyah",* Roberto Minio, The Mathematical Intelligencer, vol. 6, #1, 1984.

[2] cuja contribuição, "*Mathematics: The Right Choice?*", em "*Mathematics: Frontiers and Perspectives*", V. Arnold e outros, American Mathematical Society, 2000, refere, significativamente, a sua experiência como estudante de Atiyah.

[3] *"Being a Graduate Student of Michael Atiyah",* G. B. Segal, Asian J. Math, vol. 3, #1, 1999.

O artigo abaixo foi primeiramente publicado na revista *Mathematics TODAY*, Vol. 37, # 2, de Abril de 2001, e é aqui reproduzido com a generosa permissão de Sir Michael Atiyah e daquela revista.

Este artigo baseia-se na transcrição de uma conferência em Toronto, em Junho de 2000.

Obrigado por me terem convidado a tomar parte neste programa. Claro que, se se fala no final de um século e no princípio do seguinte, se têm duas escolhas, ambas de igual dificuldade. Uma é passar em revista a matemática dos últimos cem anos, a outra é prever a matemática dos cem seguintes. Escolhi a tarefa mais difícil. Toda a gente pode fazer previsões e não vamos cá estar para saber se estávamos errados. Mas dar uma ideia do passado é uma coisa de que todos podem discordar.

Tudo o que posso fazer é dar uma opinião pessoal. É impossível cobrir tudo e, em particular, omitirei partes relevantes da história, em parte por não ser um especialista, em parte porque são tratadas noutro sítio. Por exemplo, não direi nada sobre os grandes acontecimentos na área entre a lógica e a computação, associados aos nomes de pessoas como Hilbert, Gödel e Turing. Nem falarei muito sobre as aplicações da matemática, com excepção da física fundamental, pois são muito numerosas e requerem tratamento especial. Cada uma exigiria, para si, uma conferência. Talvez venham a ouvir mais sobre elas nalgumas das conferências no decorrer deste encontro. Mais, não vale a pena dar apenas uma lista de teoremas ou mesmo uma lista de matemáticos famosos nos últimos cem anos. Seria um exercício monótono. Assim vou tentar seleccionar alguns tópicos que acho representativos em muitos aspectos e sublinhar o que aconteceu.

Primeiro uma observação geral. Os séculos são números grosseiros. Não acreditamos realmente que, após cem anos, uma coisa pára e recomeça. Assim, ao descrever a matemática do século XX, não me vou preocupar com datas. Se uma coisa começou na década de 1890 e continuou na de 1900, ignorarei esse detalhe. Comportar-me-ei como um astrónomo e trabalharei com números bastante aproximados. Na realidade muitas coisas começaram no século XIX e só foram conseguidas no século XX.

Uma das dificuldades deste exercício é que é muito árduo colocarmo-nos na posição do que era ser matemático em 1900, pois muita da matemática do último século foi absorvida pela nossa cultura, por nós. É muito difícil imaginar um tempo em que as pessoas não pensavam nos nossos termos. De facto, se se faz uma descoberta em matemática realmente importante, acaba-se por ser completamente omitido. É-se simplesmente absorvido pelo conhecimento anterior. Voltando atrás, tem de se tentar imaginar a situação numa era diferente em que as pessoas não pensavam do mesmo modo.

Foi Poincaré quem deu os passos pioneiros e quem previu que a topologia seria um ingrediente importante na matemática do século XX. A propósito, Hilbert, que elaborou a sua famosa lista de problemas, não. A topologia mal aparecia na sua lista.

Do local ao global

Vou começar por listar alguns temas e falar sobre eles. O primeiro cabe, de uma forma lata, no que se pode chamar a passagem do local ao global. No período clássico as pessoas, em geral, estudariam coisas numa escala pequena, coordenadas locais, etc. Neste século a ênfase mudou para a tentativa de compreensão do comportamento global, em grande escala. E, porque o comportamento global é mais difícil, muita dessa compreensão é feita qualitativamente e as ideias topológicas tornaram-se muito importantes. Foi Poincaré quem deu os passos pioneiros e quem previu que a topologia seria um ingrediente importante na matemática do século XX. A propósito, Hilbert, que elaborou a sua famosa lista de problemas, não. A topologia mal aparecia na sua lista. Mas para Poincaré era muito claro que seria um factor importante.

Deixem-me listar algumas áreas e podem ver o que tenho em mente. Consideremos, por exemplo, a análise complexa ("teoria das funções" como se chamava), que estava no centro da matemática no século XIX, trabalho de grandes figuras como Weierstrass. Para elas, uma função era uma função de uma variável complexa e para Weierstrass uma função era uma série de potências. Qualquer coisa em que se podiam pôr as mãos, escrever e descrever explicitamente, ou uma fórmula. As funções eram fórmulas, eram coisas explícitas. Mas depois o trabalho de Abel, Riemann e subsequentes afasta-nos desse ponto de vista e as funções passaram a ser definidas não apenas por fórmulas explícitas mas mais pelas suas propriedades globais, onde estavam as suas singularidades, onde estavam os domínios, onde tomavam os seus valores. Estas propriedades globais eram a característica da função que a distinguia. O desenvolvimento local era só um modo de a considerar.

No início as curvas e as superfícies eram coisas que se podiam realmente ver no espaço. Dimensões mais altas eram ligeiramente fictícias, coisas que se podiam imaginar matematicamente mas que talvez se não levassem a sério.

Uma história semelhante ocorre com as equações diferenciais. Originalmente para resolver uma equação diferencial as pessoas teriam procurado uma solução local explícita, qualquer coisa que se podia escrever e que se podia agarrar. Com a evolução das coisas as soluções tornaram-se implícitas. Não era necessariamente possível descrevê-las usando fórmulas elegantes. As singularidades da solução eram as coisas que, na verdade, determinavam as suas propriedades globais. Muito semelhante no espírito, mas diferente no pormenor, ao que aconteceu na análise complexa.

Em geometria diferencial o trabalho clássico de Gauss e outros descreveria pequenas porções de espaço, bocados pequenos de curvatura e as equações locais que descrevem a geometria local. A mudança para a grande escala é bastante natural ao querer-se compreender o retrato global das superfícies curvas e a topologia que as acompanha. Quando se vai do pequeno ao grande as características topológicas passam a ser as mais significativas.

Embora à primeira vista não caiba no mesmo quadro, a teoria de números teve um desenvolvimento semelhante. Os especialistas distinguem entre aquilo a que chamam a "teoria local", onde se referem apenas a um primo, um primo de cada vez, ou a um conjunto finito de primos, e a "teoria global", onde se consideram todos os primos simultaneamente. Esta analogia entre primos e pontos, o local e o global, teve um efeito importante no desenvolvimento da teoria de números e as ideias da topologia tiveram o seu impacto.

Em física, claro, a física clássica tem a ver com a história local, em que se escreve a equação diferencial que rege o comportamento em pequena escala, e depois tem de se estudar o comportamento em grande escala de um sistema físico. Toda a física, na verdade, tem a ver com a previsão do que acontecerá quando se vai da escala pequena, onde se compreende o que está a acontecer, para uma escala grande e tirar as conclusões.

Aumento das dimensões

O meu segundo tema é diferente. É aquilo a que chamo aumento das dimensões. De novo, começando com a teoria clássica das variáveis complexas, a teoria da variável complexa clássica era, principalmente, a teoria de uma variável complexa estudada em pormenor, com grande preciosismo. A mudança para duas ou mais variáveis teve lugar, fundamentalmente, neste século e nessa área surgem fenómenos novos. Há características completamente novas e a teoria de *n* variáveis tornou-se cada vez mais dominante, um dos maiores sucessos deste século.

De novo, no passado, os geómetras diferenciais estudariam principalmente curvas e superfícies. Hoje estudamos a geometria de variedades de dimensão *n* e tem de se ser cuidadoso para compreender que esta foi uma passagem maior. No início as curvas e as superfícies eram coisas que se podiam realmente ver no espaço. Dimensões mais altas eram ligeiramente fictícias, coisas que se podiam imaginar matematicamente mas que talvez se não levassem a sério. A ideia de levar estas coisas a sério e de as estudar em pé de igualdade é, na verdade, um produto do século XX. Mais, para os nossos predecessores do século XIX, estaria longe de ser tão óbvio pensar em aumentar o número de funções, estudar não só uma mas várias funções ou funções vectoriais. Assim testemunhámos um aumento tanto no número de variáveis independentes como dependentes.

O trabalho de Hamilton sobre os quaterniões foi, provavelmente, a surpresa maior e teve um impacto enorme, causado, de facto, por ideias relacionadas com a física.

A álgebra linear teve sempre a ver com mais variáveis mas aí o aumento de dimensões ia ser mais drástico. De dimensões finitas para infinitas, do espaço vectorial para o espaço de Hilbert com um número infinito de variáveis. A análise esteve envolvida claro. Depois de funções de muitas variáveis podem ter-se funções de funções, funcionais. Estes são funções no espaço das funções. Têm todas, essencialmente, variáveis em número infinito e a isto chamamos cálculo das variações. Uma história análoga passar-se-ia com as funções gerais (não lineares). Assunto antigo mas que adquiriu proeminência no século XX. Este é portanto o meu segundo tema.

Do comutativo ao não comutativo

Um terceiro tema é a passagem do comutativo para o não comutativo. É talvez uma das características mais distintivas da matemática no século XX, da álgebra em particular. O lado não comutativo da álgebra tem sido extremamente proeminente e, claro, as suas raízes estão no século XIX. As raízes são várias. O trabalho de Hamilton sobre os quaterniões foi, provavelmente, a surpresa maior e teve um impacto enorme, causado, de facto, por ideias relacionadas com a física. Houve o trabalho de Grassmann sobre álgebras exteriores, outro sistema algébrico hoje em dia absorvido pela nossa teoria das formas diferenciais. Claro que o trabalho de Cayley em matrizes, com base na álgebra linear, e o de Galois em teoria de grupos são outros pontos altos.

Todos estes são caminhos ou componentes diferentes que formam a base da introdução da multiplicação não comutativa na álgebra que, como disse, é a base da maquinaria algébrica do século XX. Não lhes damos importância mas, no século XIX, os exemplos atrás foram descobertas tremendas. As aplicações destas ideias surgiram, muito surpreendentemente, em direcções diferentes. As aplicações em física das matrizes e da multiplicação não comutativa surgiram com a teoria quântica. As relações de comutatividade de Heisenberg são um exemplo importantíssimo de uma aplicação significante da álgebra não comutativa em física. Posteriormente von Neumann fez a extensão na sua teoria das álgebras de operadores.

A teoria de grupos foi também uma característica dominante do século XX e voltarei a este ponto mais tarde.

Do linear ao não linear

O meu tópico seguinte é a passagem do linear ao não linear. Grandes partes da matemática clássica são ou basicamente lineares ou, se não exactamente lineares, aproximadamente lineares, estudadas por algum tipo de desenvolvimento perturbativo. Os fenómenos realmente não lineares são muito mais difíceis e, em grande medida, só foram abordados seriamente neste século.

A história começa com a geometria, geometria Euclidiana, geometria do plano, do espaço, das rectas, tudo linear, e depois, em várias etapas de geometria não euclidiana, até à geometria mais geral de Riemann, onde as coisas são fundamentalmente não lineares. Nas equações diferenciais o estudo sério de fenómenos não lineares chamou a atenção para uma variedade de novos fenómenos que não surgem nos tratamentos clássicos. Podia só seleccionar dois aqui, solitões e caos, dois aspectos muito diferentes da teoria das equações diferenciais, que se tornaram extremamente proeminentes e populares neste século. Representam alternativas extremas. Os solitões representam comportamento de equações diferenciais inesperadamente organizado e o caos representa comportamento inesperadamente desorganizado. Ambos estão presentes em regimes diferentes, são interessantes e importantes mas, basicamente, são fenómenos não lineares. Uma vez mais, pode encontrar-se a história inicial de algum do trabalho sobre solitões na última parte do século XIX, mas muito ligeiramente apenas.

Em física, claro, as equações de Maxwell (as equações fundamentais do electromagnetismo) são equações diferenciais parciais lineares. Em contraste, as famosas equações de Yang-Mills, são equações não lineares que se supõe governarem as forças envolvidas na estrutura da matéria. As equações são não lineares porque as equações de Yang-Mills são, essencialmente, versões matriciais das equações de Maxwell e o facto de as matrizes não comutarem é a razão do termo não linear nas equações. Vemos aqui uma ligação interessante entre não linearidade e não comutatividade. A não comutatividade leva à não linearidade de um tipo particular, o que é especialmente interessante e importante.

Geometria versus Álgebra

Até agora escolhi alguns temas gerais. Quero falar agora sobre uma dicotomia em matemática, sempre connosco, oscilando de um para o outro lado, que me dá uma oportunidade para fazer algumas especulações ou observações filosóficas. Refiro-me à dicotomia entre geometria e álgebra. A geometria e a álgebra são os dois pilares formais da matemática, ambos muito antigos. A geometria é anterior aos Gregos, a álgebra existe desde os árabes e indianos, de modo que ambas têm sido fundamentais para a matemática, mas a sua relação tem sido difícil.

Deixem-me começar com a história do assunto. A geometria Euclidiana é o exemplo mais importante de uma teoria matemática e era firmemente geométrica até à introdução, por Descartes, das coordenadas algébricas naquilo a que hoje chamamos o plano Cartesiano. Foi uma tentativa de redução do pensamento geométrico à manipulação algébrica. Foi, claro, uma descoberta enorme ou um grande ataque à geometria por parte dos algebristas. Se analisarmos comparativamente os trabalhos de Newton e Leibniz, eles pertencem a tradições diferentes. Newton era fundamentalmente um geómetra, Leibniz era funda-

Se analisarmos comparativamente os trabalhos de Newton e Leibniz, eles pertencem a tradições diferentes. Newton era fundamentalmente um geómetra, Leibniz era fundamentalmente um algebrista e havia boas e profundas razões para isso.

mentalmente um algebrista e havia boas e profundas razões para isso. Para Newton a geometria, ou o cálculo como ele o desenvolveu, era a tentativa matemática para descrever as leis da natureza. Interessava-se pela física em sentido lato e a física tinha lugar no mundo da geometria. Se se queria perceber como as coisas funcionavam pensava-se em termos do mundo físico, pensava-se em termos de figuras geométricas. Quando desenvolveu o cálculo quilo tão próximo quanto possível do contexto físico que estava por trás. Usou pois argumentos geométricos porque assim se mantinha próximo do significado. Por seu lado, Leibniz tinha a intenção, a ambiciosa intenção, de formalizar toda a matemática, tornando-a uma grande máquina algébrica. Era uma abordagem totalmente oposta à de Newton e havia notações muito diferentes. Como sabemos, na grande controvérsia entre Newton e Leibniz, a notação de Leibniz acabou por ganhar. Seguimos o seu modo de escrever derivadas parciais. O espírito de Newton ainda lá está mas esteve enterrado durante muito tempo.

Até ao final do século XIX, há cem anos, as duas figuras mais importantes eram Poincaré e Hilbert. Já os mencionei e, grosso modo, são discípulos de Newton e Leibniz respectivamente. O pensamento de Poincaré era mais no espírito da geometria, topologia, usando essas ideias como ferramentas fundamentais. Hilbert era mais um formalista, queria axiomatizar, formalizar e dar tratamentos rigorosos e formais. Pertencem claramente a tradições diferentes embora qualquer grande matemático não possa ser facilmente classificado.

Ao preparar esta conferência pensei dever apresentar mais alguns nomes da nossa geração presente que representam a continuação daquelas tradições. É muito difícil falar sobre pessoas vivas, quem pôr na lista? Pensei então para mim, quem se importaria de ser posto num dos lados de uma lista tão famosa? Escolhi portanto dois nomes: Arnold, como o herdeiro da tradição de Poincaré-Newton, e Bourbaki, como, penso, o discípulo mais famoso de David Hilbert. Arnold não esconde o facto de a sua visão da mecânica, da física, ser basicamente geométrica, começando com Newton. Tudo o mais, com a excepção de algumas pessoas como Riemann, que foi um pouco um desvio, foi um equívoco. Bourbaki tentou continuar o programa formal de Hilbert de axiomatização e formalização da matemática, com algum sucesso em grande medida. Cada ponto de vista tem os seus méritos, mas há tensão entre eles.

Assim a intuição ou a percepção espaciais são ferramentas poderosíssimas e aí reside a razão de a geometria ser uma parte tão poderosa da matemática, não apenas para coisas que são claramente geométricas mas até para coisas que o não são.

Deixem-me explicar a minha própria visão da diferença entre geometria e álgebra. Que a geometria tem a ver com o espaço é indiscutível. Se olhar para a assistência nesta sala vejo imenso, num só segundo ou microsegundo absorvo uma quantidade vasta de informação e tal não é acidental. Os nossos cérebros foram construídos de tal modo que estão extremamente ligados à visão. A visão, segundo amigos que trabalham em neurofisiologia, usa completamente qualquer coisa como 80 ou 90% do córtex cerebral. Há cerca de 17 centros diferentes no cérebro, cada um deles especializado numa parte diferente do processo da visão. Algumas partes estão relacionadas com a horizontalidade, outras com a verticalidade, outras com a cor, a perspectiva e, finalmente, algumas com o significado e a interpretação. Compreender, e interpretar, o mundo que nós vemos é uma parte muito importante da nossa evolução. Assim a intuição ou a percepção espaciais são ferramentas poderosíssimas e aí reside a razão de a geometria ser uma parte tão poderosa da matemática, não apenas para coisas que são claramente geométricas mas até para coisas que o não são. Tentamos dar-lhe forma geométrica porque isso nos permite usar a nossa intuição.

Isso é bastante claro se tentarmos explicar uma questão de matemática a um estudante ou a um colega. Tem-se um argumento longo e difícil e finalmente o estudante compreende. O que é que o estudante diz? "Estou a ver!" Ver é sinónimo de compreender e usamos a palavra "percepção" querendo dizer ambas. Pelo menos na língua inglesa isto é verdade. Seria interessante compará-lo com outras línguas. Acho que é muito importante que a mente humana tenha evoluído com esta capacidade enorme de absorver uma quantidade vasta de informação, por acção visual instantânea, e a matemática apodera-se disso e aperfeiçoa-o.

A álgebra, por outro lado (e podem não ter pensado nisso deste modo), tem a ver basicamente com o tempo. Qualquer que seja o tipo de álgebra que se faça, uma sequência de operações é realizada uma após a outra e "uma após a outra" significa que se tem de ter tempo. Não se pode imaginar a álgebra num universo estático, contudo a geometria é essencialmente estática. Posso apenas sentar-me aqui e ver, pode nada mudar, mas posso ver ainda. A álgebra, contudo, tem a ver com o tempo porque se têm operações que são executadas sequencialmente e, quando digo "álgebra", não me refiro apenas à álgebra moderna. Qualquer algoritmo, qualquer processo de cálculo, é uma sequência de passos executados um após outro. O computador torna isso muito claro. O computador moderno recebe a sua informação numa carreira de zeros e uns e dá a resposta.

A álgebra tem a ver com a manipulação no **tempo** e a geometria com o **espaço**. São dois aspectos ortogonais do mundo e representam dois pontos de vista diferentes em matemática. Portanto a discussão ou diálogo, no passado, entre matemáticos sobre a importância relativa da geometria e da álgebra representa qualquer coisa de muito, muito fundamental.

> Sou aqui um pouco duro com os algebristas, mas fundamentalmente o objectivo da álgebra foi sempre produzir uma fórmula que se pudesse introduzir numa máquina, rodar uma manivela e obter a resposta.

Claro que não adianta pensar nisto como uma discussão em que um lado perde e o outro ganha. Gosto de pensar nisto sob a forma de uma analogia. "Deve-se ser apenas algebrista ou geómetra?" é como dizer "Prefere ser surdo ou cego?" Se se é cego não se vê o espaço, se se é surdo não se ouve e ouvir tem lugar no tempo. Tudo considerado, é preferível ter ambas as faculdades.

Em física há uma divisão análoga, aproximadamente paralela, entre os conceitos e as experiências. Há duas partes na física: teoria - conceitos, ideias, palavras, leis - e o equipamento experimental. Acho que os conceitos, num sentido lato, são geométricos pois referem-se a coisas que ocorrem no mundo real. Uma experiência, por outro lado, é mais como um cálculo algébrico. Faz-se qualquer coisa no tempo, medem-se números, inserem-se em fórmulas, contudo os conceitos por trás das experiências são parte da tradição geométrica.

Uma maneira de enquadrar a dicotomia num contexto mais filosófico ou literário é dizer que, para o geómetra, a álgebra é aquilo a que se pode chamar a "Oferta Faustiana". Como é conhecido, na história de Goethe, o diabo ofereceu a Fausto o que ele quisesse (no caso, o amor de uma linda mulher) em troca da venda da sua alma. A álgebra é a oferta feita ao matemático pelo diabo. Diz o diabo: "Dou-te esta máquina poderosa, responderá a qualquer pergunta que queiras. Tudo o que tens de fazer é dar-me a tua alma. Desiste da geometria e terás esta máquina maravilhosa". [Hoje em dia pode pensar-se nela como sendo um computador!] Claro que nós gostamos de ter ambas as coisas, provavelmente enganaríamos o diabo, fingiríamos a venda da nossa alma sem o revelar. Apesar de tudo o perigo para a nossa alma está lá, pois, ao passar-se para o cálculo algébrico, basicamente deixa-se de pensar, deixa-se de pensar geometricamente, deixa-se de pensar no significado.

Sou aqui um pouco duro com os algebristas, mas fundamentalmente o objectivo da álgebra foi sempre produzir uma fórmula que se pudesse introduzir numa máquina, rodar uma manivela e obter a resposta. Pegava-se em qualquer coisa que tinha um significado, convertia-se numa fórmula e obtinha-se uma resposta. Nesse processo não é preciso pensar mais naquilo a que correspondem na geometria os diferentes passos na álgebra. Perde-se perspectiva que pode ser importante em etapas diferentes. Não se deve abandoná-la completamente. Pode-se querer voltar a ela mais tarde. É isto que eu quero dizer com a Oferta Faustiana. Tenho a certeza que é provocatória.

A escolha entre geometria e álgebra deu origem a híbridos que confundem ambas e a divisão entre álgebra e geometria não é tão simples e ingénua como acabei de dizer. Por exemplo, os algebristas usam diagramas frequentemente. O que é um diagrama se não uma concessão à intuição geométrica?

Técnicas em Comum

Deixem-me agora voltar a falar não tanto acerca de temas mas talvez em termos de técnicas e métodos comuns que foram usados. Quero descrever um certo número de métodos comuns que foram aplicados numa variedade de campos. O primeiro é:

Teoria da Homologia

Tradicionalmente a teoria da homologia começa como um ramo da topologia. Refere-se à situação seguinte. Tem-se um espaço topológico complicado e quer extrair-se alguma informação simples que envolva a contagem de buracos, alguns invariantes lineares aditivos que se possam associar a um espaço complicado. Se se quiser, é uma construção de invariantes lineares numa situação não linear. Geometricamente pensa-se em ciclos que se podem somar e subtrair e obtém-se então aquilo a que se chama o grupo de homologia de um espaço. A homologia é uma ferramenta algébrica fundamental, inventada na primeira metade do século como maneira de obter alguma informação acerca dos espaços topológicos. Extrai-se alguma álgebra da geometria.

A homologia aparece também noutros contextos. Uma outra fonte da teoria da homologia começa com Hilbert e o estudo de polinómios. Os polinómios são funções não lineares e podem multiplicar-se para se obterem graus mais altos. Hilbert teve grande visão ao considerar "ideais", combinações lineares de polinómios, com zeros comuns. Procurou geradores destes ideais. Esses geradores podiam ser redundantes. Considerou as relações e depois procurou relações entre relações. Obteve uma hierarquia de tais relações, chamadas "syzygies"[4] de Hilbert, e esta teoria era uma maneira sofisticada de reduzir uma situação não linear, o estudo dos polinómios, a uma situação linear. Hilbert produziu, essencialmente, um sistema complicado de relações lineares expressando alguma da informação sobre objectos não lineares, os polinómios.

Há grande paralelismo entre esta teoria algébrica e a teoria topológica, estando elas agora fundidas naquilo a que se chama "álgebra homológica". Um dos grandes triunfos dos anos 50 em geometria algébrica foi o desenvolvimento da teoria da cohomologia dos feixes e a sua extensão à geometria analítica pela escola francesa de Leray, Cartan, Serre e Grothendieck, na qual se tem uma combinação das ideias topológicas de Riemann-Poincaré, as ideias algébricas de Hilbert e ainda alguma análise.

Acontece que a teoria da homologia tem ainda aplicações mais amplas noutros ramos da álgebra. Podem introduzir-se grupos de homologia, que são objectos lineares associados a objectos não lineares. Podem tomar-se, por exemplo, grupos, grupos finitos, ou álgebras de Lie. Ambos têm grupos de homologia associados. Há, através do

[4] À falta de uma tradução adequada talvez se possa usar "relações polinomiais". Simplificando exageradamente, um exemplo, para $p(x)=x^2$, $q(y)=y^2$ e $r(x,y)=xy$, é $pq=r^2$. Devo esta informação ao meu colega Alexander Kovacec.

grupo de Galois, importantes aplicações da teoria da homologia na teoria de números. Assim a teoria da homologia provou ser uma das ferramentas poderosas para analisar uma variedade de situações, uma característica típica da matemática do século XX.

Pode também pensar-se na K-Teoria do modo seguinte, como uma tentativa de considerar a teoria de matrizes, onde o produto de matrizes não é comutativo, e procurar construir invariantes lineares ou abelianos de matrizes.

K-Teoria

Outra técnica, semelhante à teoria da homologia em muitos aspectos, que tem sido largamente aplicada e se estende por muitas partes da matemática, teve origem posterior. Não emergiu até meados do século XX embora seja algo com raízes muito lá para trás também. É a chamada "K-Teoria" e está, na verdade, fortemente relacionada com a teoria da representação. A teoria da representação de, digamos, grupos finitos começa no último século mas a sua forma moderna, a K-Teoria, tem origem mais recente. Pode também pensar-se na K-Teoria do modo seguinte, como uma tentativa de considerar a teoria de matrizes, onde o produto de matrizes não é comutativo, e procurar construir invariantes lineares ou abelianos de matrizes. Traços, dimensões e determinantes são invariantes abelianos da teoria das matrizes e a K-Teoria é uma maneira sistemática de tentar lidar com eles, chamando-se-lhe, por vezes, "álgebra linear estável". A ideia é a de que, se tivermos duas matrizes grandes, a matriz A e a matriz B, que não comutam, elas passarão a comutar se colocadas em posições ortogonais em blocos diferentes. Como num espaço grande as coisas podem mudar de posição então, de forma aproximada, pode pensar-se que isso vai ser suficientemente bom para nos dar alguma informação. É a base da K-Teoria como técnica. É semelhante à teoria da homologia na medida em que ambas tentam extrair informação linear de situações não lineares.

Em geometria algébrica estas ideias foram introduzidas, com grande êxito, por Grothendieck, em relação muito próxima com a história envolvendo a teoria dos feixes discutida há momentos e em ligação com o seu trabalho sobre o teorema de Riemann-Roch.

Em topologia Hirzebruch e eu copiámos estas ideias e aplicámo-las num contexto puramente topológico. Em certo sentido enquanto o trabalho de Grothendieck está relacionado com o trabalho de Hilbert sobre "syzygies" o nosso trabalho estava mais relacionado com o trabalho de Riemann e Poincaré sobre homologia, usando funções contínuas em vez de polinómios. Teve também um papel na teoria do índice dos operadores elípticos, em análise linear[5]. Numa direcção diferente, a vertente algébrica da história, com aplicação potencial à teoria dos números, foi depois desenvolvido por Milnor, Quillen e outros. Nessa direcção levou a muitas questões interessantes.

Na análise funcional o trabalho de muita gente, incluindo Kasparov, estendeu a K-Teoria contínua à situação das álgebras-C* não comutativas. As funções contínuas num espaço formam, relativamente à multiplicação, uma álgebra comutativa, mas álgebras não comutativas análogas surgem noutras situações e a análise funcional é um ambiente natural para questões deste tipo.

A K-Teoria é assim outra área onde uma variedade de partes diferentes da matemática se prestam a este formalismo bastante simples embora, em cada caso, haja questões técnicas muito difíceis específicas da área, que se ligam com outras partes do assunto. Não é uma ferramenta uniforme, é mais um quadro uniforme, com analogias e semelhanças entre uma parte e a outra.

Muito deste trabalho foi também estendido por Alain

[5] Um ponto alto na carreira de Atiyah. Ver *An Interview with Michael Atiyah*, Roberto Minio, The Mathematical Intelligencer, vol. 6, #1, 1984.

Connes à "geometria diferencial não comutativa".

É muito interessante que, muito recentemente, Witten trabalhando em teoria das cordas (as ideias mais modernas em física fundamental) tenha descoberto maneiras muito curiosas de como a K-Teoria parece fornecer um ambiente natural para as chamadas "quantidades conservadas". Enquanto que no passado se pensava que a teoria da homologia era o quadro natural para aquelas, parece agora que a K-Teoria fornece uma resposta melhor.

Grupos de Lie

Outro conceito unificador, que não é apenas uma técnica, é o de grupos de Lie. Ora os grupos de Lie, e refiro-me basicamente aos grupos ortogonal, unitário e simpléctico mais alguns grupos excepcionais, desempenharam um papel muito importante na história da matemática do século XX. De novo, vêm do século XIX. Sophus Lie era, claro, um matemático norueguês do século XIX e ele, Felix Klein e outros "deram um empurrão" à "teoria dos grupos contínuos", como era chamada. Originalmente, para Klein, era uma maneira de tentar unificar os tipos diferentes de geometria, geometria euclidiana, geometria não euclidiana. Embora este assunto começasse no século XIX, "levantou voo" realmente no século XX. O século XX tem sido fortemente dominado pela teoria dos grupos de Lie como uma espécie de quadro unificador onde estudar muitas questões diferentes.

Mencionei o papel da geometria nas ideias de Klein. Para Klein, as geometrias eram espaços homogéneos, onde as coisas se podiam mover sem distorção, e eram portanto determinadas por um grupo de isometrias associado. O grupo Euclidiano dava a geometria Euclidiana, a geometria hiperbólica vinha de outro grupo de Lie. Assim cada geometria homogénea correspondia a um grupo de Lie diferente. Mas mais tarde, na sequência do trabalho de Riemann em geometria, as pessoas estavam mais preocupadas com geometrias que não eram homogéneas, onde a curvatura variava de lugar para lugar e não havia simetrias globais do espaço.

Contudo os grupos de Lie tiveram ainda um papel importante dado surgirem a nível infinitesimal já que no espaço tangente temos coordenadas euclidianas. Assim no espaço tangente, infinitesimamente, a teoria dos grupos de Lie reaparece mas, porque se têm de comparar pontos diferentes em lugares diferentes, temos de deslocar as coisas de alguma maneira de forma a lidar com os diferentes grupos de Lie. Foi esta a teoria desenvolvida, realmente, por Elie Cartan, a base da geometria diferencial moderna, e foi também ela o quadro essencial à teoria da relatividade de Einstein. A teoria de Einstein deu, claro, um impulso enorme a todo o desenvolvimento da geometria diferencial.

O século XX tem sido fortemente dominado pela teoria dos grupos de Lie como uma espécie de quadro unificador onde estudar muitas questões diferentes.

Continuando ao longo do século XX, o aspecto global, que já mencionei atrás, envolveu grupos de Lie e geometria diferencial ao nível global. Um desenvolvimento importante, caracterizado pelo trabalho de Borel e Hirzebruch, veio trazer informação sobre as chamadas "classes características". Estas são invariantes topológicos combinando três componentes chave, os grupos de Lie, a geometria diferencial e a topologia, e, claro, a álgebra associada com o próprio grupo.

Numa direcção mais analítica obtemos aquilo a que agora se chama análise harmónica não comutativa. É a generalização da teoria de Fourier onde as séries ou integrais de Fourier correspondem, basicamente, aos grupos de Lie comutativos S^1 e R. Quando se substituem estes por grupos de Lie mais complicados obtém-se uma teoria muito bonita e elaborada que combina a teoria da representação dos grupos de Lie e a análise. Essencialmente este é o trabalho da vida de Harish-Chandra.

Na teoria de números todo o "programa de Langlands", como é conhecido, que está intimamente relacionado também com a teoria de Harish-Chandra, decorre no âmbito da teoria dos grupos de Lie. Para cada grupo de Lie tem-se a teoria de números e o programa de Langlands associados, que foi levado a cabo até certo ponto. Influenciou uma grande parte do trabalho em teoria de números algébrica na segunda metade deste século. O estudo das formas modulares enquadra-se nesta parte da história, incluindo o trabalho de Andrew Wiles sobre o último Teorema de Fermat.

Podia pensar-se que os grupos de Lie são particularmente relevantes apenas em contextos geométricos, dada a necessidade de variação contínua, mas os grupos análogos sobre corpos finitos originam grupos finitos e a maior parte dos grupos finitos surge deste modo. Portanto as técnicas de algumas partes da teoria de Lie aplicam-se mesmo numa situação discreta para corpos finitos ou corpos locais. Há imenso trabalho que é álgebra pura, trabalho a que, por exemplo, está associado o nome de George Lusztig, onde se estuda a teoria da representação de tais grupos finitos e onde muitas das técnicas que mencionei antes têm correspondentes.

Acho que a descoberta, apenas, deste Monstro é o resultado mais sensacional da classificação. Sucede que o Monstro é um animal muito interessante que está ainda agora a ser compreendido. Tem ligações inesperadas com grandes partes de outras partes da matemática, com formas modulares elípticas, e até com a física teórica e a teoria quântica dos campos.

Grupos Finitos

Chegamos assim aos grupos finitos, o que me faz lembrar que a classificação dos grupos simples finitos é algo onde tenho de admitir uma coisa. Há alguns anos fui entrevistado, quando a história dos grupos simples finitos estava quase concluída, e perguntaram-me o que é que eu achava. Fui algo precipitado ao dizer que não achava que fosse muito importante. A razão era que a classificação dos grupos simples finitos nos dizia que a maior parte dos grupos simples era formada pelos que conhecíamos e que havia uma lista de algumas excepções. Num certo sentido fechou a área, não abriu as coisas. Não fico muito entusiasmado quando as coisas fecham em vez de abrir mas, claro, muitos amigos meus que trabalham nesta área ficaram muito, muito zangados. Depois disso tive de usar uma espécie de colete à prova de bala!

Há um ponto importante. Chamei realmente a atenção para que na lista dos chamados "grupos esporádicos" ao maior era dado o nome de "Monstro". Acho que a descoberta, apenas, deste Monstro é o resultado mais sensacional da classificação. Sucede que o Monstro é um animal muito interessante que está ainda agora a ser compreendido. Tem ligações inesperadas com grandes partes de outras partes da matemática, com formas modulares elípticas, e até com a física teórica e a teoria quântica dos campos. Este foi um produto interessante da classificação. As classificações, só por si, como digo, fecham a porta, mas o Monstro abriu uma porta.

Impacto da Física

Deixem-me passar agora para um tema diferente, o impacto da física. Ao longo da história a física tem tido uma longa associação com a matemática e largas partes da matemática, o cálculo por exemplo, foram desenvolvidas para resolver problemas em física. Isto tinha-se tornado talvez menos evidente em meados do século XX, com a maior parte da matemática pura a progredir muito bem independentemente da física, mas no último quartel deste século as coisas mudaram drasticamente. Deixem-me tentar, brevemente, passar em revista a interacção da física com a matemática e com a geometria em particular.

No século XIX Hamilton desenvolveu a mecânica clássica, introduzindo aquilo a que hoje se chama formalismo Hamiltoniano. A mecânica clássica levou ao que chamamos "geometria simpléctica". É um ramo da geometria que podia ter sido estudado muito mais cedo mas, na verdade, não foi estudado seriamente até às duas últimas décadas. Acontece que é uma parte da geometria muito rica. A geometria, no sentido em que estou a usar aqui a palavra, tem três ramos, geometria riemanniana, geometria complexa e geometria simpléctica, correspondentes aos três tipos de grupos de Lie. Destas a geometria simpléctica é a mais recente, de alguns modos, possivelmente a mais interessante e, certamente, uma com relações extremamente próximas da física por causa das suas origens históricas em ligação com a mecânica hamiltoniana e, mais recentemente, com a mecânica quântica. Ora, as equações de Maxwell, que mencionei antes, as equações lineares fundamentais do electromagnetismo, foram a motivação para o trabalho de Hodge sobre formas harmónicas e a aplicação à geometria algébrica. Veio a ser uma teoria extremamente frutífera que tem sustentado muito do trabalho em geometria desde os anos 30.

Já mencionei a relatividade geral e o trabalho de Einstein. A mecânica quântica, claro, forneceu uma contribuição enorme. Não só nas relações de comutatividade mas, mais significativamente, na ênfase no espaço de Hilbert e na teoria espectral.

De um modo mais concreto e óbvio, a cristalografia na sua forma clássica tratava das simetrias das estruturas cristalinas. Os grupos de simetria finitos que podem ocorrer em torno dos pontos começaram por ser estudados pelas suas aplicações à cristalografia. Neste século as aplicações mais profundas da teoria de grupos vieram a ter relações com a física. As partículas elementares que se supõe constituírem a matéria parecem ter simetrias escondidas ao nível mais pequeno, onde há alguns grupos de Lie à espreita, que não se podem ver mas cujas simetrias se manifestam quando se estuda o comportamento real das partículas. Postula-se pois um modelo do qual a simetria é um ingrediente essencial e as diferentes teorias que agora prevalecem têm incorporados como grupos de simetria primordiais certos grupos de Lie básicos, como *SU(2)* e *SU(3)*. Assim estes grupos de Lie aparecem como blocos constitutivos da matéria.

Com isto quero dizer que os físicos, baseados na sua compreensão da teoria física, foram capazes de prever que certas coisas seriam verdadeiras na matemática. Não se trata, claro, de uma demonstração rigorosa mas é apoiada por uma intuição poderosa, casos especiais e analogias.

Nem são os grupos de Lie compactos os únicos a aparecer. Alguns grupos de Lie não compactos aparecem em física, como o grupo de Lorentz. Foram os físicos os primeiros a começar o estudo da teoria da representação dos grupos de Lie não compactos. São representações que têm de ter lugar no espaço de Hilbert pois, para grupos compactos, as representações irredutíveis têm dimensão finita mas os grupos não compactos exigem dimensões infinitas. Foram os físicos quem compreendeu isto primeiro.

No último quartel do século XX, aquele que acabou, houve uma incursão enorme de novas ideias da física na matemática. É talvez uma das histórias mais notáveis de todo o século. Precisa de uma conferência só para si mas, basicamente, a teoria quântica dos campos e a teoria das cordas foram aplicadas de maneiras notáveis para obter novos resultados, ideias e técnicas em muitas partes da matemática. Com isto quero dizer que os físicos, baseados na sua compreensão da teoria física, foram capazes de prever que certas coisas seriam verdadeiras na matemática. Não se trata, claro, de uma demonstração rigorosa mas é apoiada por uma intuição poderosa, casos especiais e analogias. Estes resultados previstos pelos físicos têm sido, repetidamente, verificados pelos matemáticos e tem-se visto que estão, fundamentalmente, correctos embora seja muito difícil apresentar demonstrações e muitos deles não tenham ainda sido completamente demonstrados.

Tem havido portanto uma contribuição tremenda nesta direcção nos últimos 25 anos. Os resultados são extremamente detalhados. Não se trata dos físicos dizerem apenas "este é o tipo de coisa que deve ser verdade". Eles dizem "aqui está a fórmula precisa e eis os primeiros dez casos (envolvendo números com mais de 12 dígitos)". Dão respostas exactas a problemas complicados, não o tipo de coisas que se possam adivinhar, coisas para cujo cálculo se precisa de maquinaria. A teoria quântica dos campos forneceu um instrumento notável, muito difícil de compreender matematicamente mas que tem tido um bónus inesperado em termos de aplicações. Tem sido esta verdadeiramente a história emocionante dos últimos 25 anos.

Eis alguns dos ingredientes: o trabalho de Simon Donaldson em variedades de dimensão 4, o trabalho de Vaughan Jones sobre invariantes dos nós, a simetria por reflexão, os grupos quânticos e mencionei o Monstro apenas como um extra.

Sobre o que é este assunto? Como mencionei antes, o século XX viu uma mudança no número de dimensões acabando com um número infinito. Os físicos foram para além disso. Na teoria quântica dos campos estão realmente a tentar fazer um estudo, muito detalhado e em profundidade, do espaço de dimensão infinita. Os espaços de dimensão infinita com que eles trabalham são, tipicamente, espaços de funções de vários tipos. São muito complicados não só por a dimensão ser infinita mas porque têm álgebra, geometria e topologia complicadas também e há grandes grupos de Lie aqui e ali, grupos de Lie de dimensão infinita. Assim, como grandes partes da matemática do século XX tiveram a ver com o desenvolvimento da geometria, topologia, álgebra e análise em grupos de Lie e variedades de dimensão finita, esta parte da física diz respeito a tratamentos análogos em dimensões infinitas e, claro, é uma história muito diferente mas com compensações enormes.

Deixem-me explicar isto um pouco mais em detalhe. As teorias quânticas dos campos ocorrem no espaço e no tempo e o espaço supõe-se ser, realmente, tridimensional mas há modelos simplificados onde se considera uma dimensão. Nos espaço e tempo unidimensionais as coisas tipicamente encontradas pelos físicos são, em termos matemáticos, grupos como o grupo dos difeomorfismos de S^1 ou o grupo das aplicações diferenciáveis de S^1 num grupo de Lie compacto. Estes são dois exemplos, muito fundamentais, de grupos de Lie de dimensão infinita que surgem nas teorias quânticas dos campos nestas dimensões e são objectos matemáticos muito razoáveis que têm sido estudados pelos matemáticos desde há algum tempo.

Em tais teorias de dimensão *1+1* pode tomar-se uma superfície de Riemann para espaço-tempo e tal leva a novos resultados. Por exemplo, o espaço de moduli das superfícies de Riemann com um certo género é um objecto clássico que data do último século. A teoria quântica dos campos levou a resultados novos sobre a cohomologia destes espaços de moduli. Outro espaço de moduli bastante

Os chamados "grupos quânticos" vêm daqui também. Ora a coisa melhor acerca deles é o nome. Claramente não são grupos! Se me pedissem a definição de grupo quântico precisaria de mais meia hora. São objectos complicados mas não há dúvidas de que têm uma relação profunda com a teoria quântica.

semelhante é o espaço de moduli dos fibrados com grupo *G*, com curvatura zero, sobre uma superfície Riemanniana de género *g*. Estes espaços são muito interessantes e a teoria quântica dos campos fornece resultados precisos sobre eles. Em particular, há bonitas fórmulas para os volumes envolvendo valores das funções zeta.

Outra aplicação está relacionada com a contagem de curvas. Se considerarmos as curvas algébricas, com um grau dado, no plano e quisermos saber quantas, por exemplo, passam por uns tantos pontos caímos em problemas enumerativos da geometria algébrica, problemas que teriam sido clássicos no século passado. São muito difíceis. Foram resolvidos com maquinaria moderna chamada "cohomologia quântica", parte da história vinda da teoria quântica dos campos. Ou podem considerar-se questões mais difíceis sobre curvas não no plano mas em variedades curvas. Obtém-se outra história bonita com resultados explícitos com o nome de simetria por reflexão. Tudo isto vem da teoria quântica dos campos nas dimensões *1+1*.

A segunda metade do século vinte foi muito mais aquilo a que chamo "era da unificação", onde se atravessam fronteiras, se levam as técnicas de uma área para a outra e, em grande medida, as coisas se tornaram híbridas.

Subindo uma dimensão, onde temos o espaço bidimensional e o tempo unidimensional, é aí que surge a teoria de Vaughan Jones de invariantes dos nós. Teve uma interpretação ou explicação elegante em termos da teoria quântica dos campos.

Os chamados "grupos quânticos" vêm daqui também. Ora a coisa melhor acerca deles é o nome. Claramente não são grupos! Se me pedissem a definição de grupo quântico precisaria de mais meia hora. São objectos complicados mas não há dúvidas de que têm uma relação profunda com a teoria quântica. Emergiram da física e estão a ser aplicados por algebristas "intransigentes" que, na verdade, os usam para cálculos precisos.

Dando mais um passo em frente, para a teoria de dimensão *4* (dimensão *3+1*), estamos onde a teoria de Donaldson se enquadra e onde a teoria quântica dos campos tem tido impacto maior. Em particular, levou Seiberg e Witten a criarem a sua teoria alternativa, que é baseada na intuição física e dá, matematicamente, resultados maravilhosos também. Tudo isto são exemplos particulares. Há muitos mais.

Há depois a teoria das cordas e já está ultrapassada! É sobre a M-Teoria que devemos falar agora, uma teoria rica, mais uma vez com um largo número de aspectos matemáticos. Os resultados que estão a emergir estão ainda a ser digeridos e vão manter os matemáticos ocupados por muito tempo.

Resumo Histórico

Deixem-me tentar fazer um breve sumário e considerar a história em poucas palavras: o que aconteceu à matemática? Com alguma ligeireza vou pôr os séculos XVIII e XIX juntos, a era daquilo a que se pode chamar a matemática clássica, a era que associamos com Euler e Gauss, onde toda a grande matemática clássica foi criada e desenvolvida. Podia pensar-se que seria quase o fim da matemática mas o século XX, pelo contrário, foi na verdade muito produtivo e é sobre isso que eu tenho estado a falar.

Grosso modo, o século vinte pode ser dividido em duas metades. Diria que a primeira foi dominada por aquilo a que chamo a "era da especialização", a era em que a abordagem de Hilbert, de tentar formalizar as coisas, defini-las cuidadosamente e depois levar a cabo o que se pode fazer em cada área, foi muito influente. Como disse, o nome de Bourbaki está associado a esta tendência, em que as pessoas focavam a sua atenção naquilo que se podia obter num certo sistema, algébrico ou não, numa dada altura. A segunda metade do século vinte foi muito mais aquilo a que chamo "era da unificação", onde se atravessam fronteiras, se levam as técnicas de uma área para a outra e, em grande medida, as coisas se tornaram híbridas. Penso que é uma simplificação exagerada mas que resume, de forma breve, alguns dos aspectos que se podem ver na matemática do século XX.

E quanto ao século XXI? Disse que o século XXI podia ser a era da matemática quântica ou, se preferirem, da matemática de dimensão infinita. O que quer isto dizer? A matemática quântica pode querer dizer, se lá chegarmos, compreender adequadamente a análise, geometria, topologia e álgebra de vários espaços de funções não lineares e por "compreender adequadamente" refiro-me à compreensão numa forma tal que permita demonstrações muito rigorosas de todas as coisas maravilhosas sobre as quais os físicos têm andado a especular.

Ao lado de todo o sofisticado material de dimensão infinita a geometria das baixas dimensões é um embaraço. De muitas maneiras as dimensões onde começámos, onde os nossos antepassados começaram, permanecem um mistério.

Deve dizer-se que se se aborda a dimensão infinita de modo ingénuo e se formulam questões ingénuas, em geral, se obtêm as respostas erradas ou as respostas são pouco interessantes. A aplicação física, a perspectiva e a motivação permitiram, aos físicos, colocar questões inteligentes sobre dimensões infinitas, fazer coisas de grande subtileza onde surgem respostas razoáveis. Fazer análise de dimensão infinita deste modo não é, de forma alguma, uma tarefa simples. A abordagem tem de ser correcta. Temos imensas pistas. O mapa está estendido: é isto que deve ser feito mas é ainda um caminho longo a percorrer.

Que mais pode acontecer no século XXI? Gostaria de realçar a geometria diferencial não comutativa de Connes. Alain Connes tem esta teoria unificada magnífica. Mais uma vez combina tudo. Combina análise, álgebra, geometria, topologia, física, teoria de números, contribuindo todas para certas partes. É um quadro que nos permite fazer aquilo que os geómetras diferenciais normalmente fazem, incluindo a sua relação com a topologia, no contexto da análise não comutativa. Há boas razões para querer fazer isto, aplicações (potenciais ou outras) em teoria de números, geometria, grupos discretos etc. e em física. Está precisamente a ser desenvolvida uma ligação interessante com a física. Até onde se irá, o que se conseguirá, está para se ver. É, com certeza, qualquer coisa que eu espero venha a ter desenvolvimentos significativos na primeira década, pelo menos, do próximo século e é possível que possa ter ligação com a ainda-por-desenvolver teoria quântica dos campos (rigorosa).

Numa outra direcção há a chamada "geometria aritmética" ou geometria de Arakelov que tenta unificar a geometria algébrica e partes da teoria dos números tanto quanto possível. É uma teoria com grande sucesso. Começou bem mas tem ainda um longo caminho a percorrer. Quem sabe?

Claro que há elementos comuns em tudo isto. Espero que a física tenha o seu impacto disseminado por todo o lado, até na teoria de números. Andrew Wiles não concorda e só o tempo dirá.

São estes os elementos que vejo como emergindo na próxima década mas há aquilo a que chamo um "joker" no baralho[6]: a descida para a geometria das dimensões mais baixas. Ao lado de todo o sofisticado material de dimensão infinita a geometria das baixas dimensões é um embaraço. De muitas maneiras as dimensões onde começámos, onde os nossos antepassados começaram, permanecem um mistério. Chamo "baixas" às dimensões 2, 3 e 4. O trabalho

[6] Tradução literal da expressão inglesa *joker in the pack* que significa uma coisa cuja influência não é previsível.

de, por exemplo, Thurston em geometria tridimensional procura uma classificação das geometrias que se podem pôr em variedades de dimensão três. É muito mais profundo que a teoria bidimensional. O programa de Thurston não está ainda de forma alguma completo e completá-lo será certamente um desafio enorme.

A outra história notável em três dimensões é o trabalho de Vaughan Jones com ideias vindas essencialmente da física. Dá-nos mais informação sobre as três dimensões, quase ortogonal à informação contida no programa de Thurston. Como ligar estes dois lados da história permanece um desafio enorme mas há sugestões recentes para uma possível ponte. Portanto toda esta área, ainda em dimensões baixas, tem as suas ligações com a física mas permanece, na verdade, muito misteriosa.

Gostaria finalmente de mencionar que o que surge com muita proeminência na física são "dualidades". Estas dualidades, em termos gerais, surgem quando uma teoria quântica tem duas realizações diferentes como uma teoria clássica. Um exemplo simples é a dualidade entre posição e momento em mecânica clássica. Substitui um espaço pelo seu espaço dual e, nas teorias lineares, essa dualidade é apenas a transformada de Fourier. Mas, nas teorias não lineares, como substituir a transformada de Fourier é um dos desafios maiores. Largas partes da matemática têm a ver com a generalização de dualidades em situações não lineares. Os físicos parecem ser capazes de o fazer de modo notável nas suas teoria das cordas e M-Teoria. Dão, uns após outros, exemplos de dualidades maravilhosas que, em sentido lato, são versões não lineares e de dimensão infinita de transformadas de Fourier e que parecem funcionar. Mas compreender essas dualidades não lineares parece ser também um dos maiores desafios do próximo século.

Acho que vou ficar por aqui. Há muito trabalho e é muito agradável para um velho como eu falar para muitos jovens como vocês, poder dizer-vos: há imenso trabalho para vocês no próximo século!

Nota do Tradutor: Os meus agradecimentos vão para Maria do Rosário Pinto, Gudlaugur Thorbergsson, Onésimo Teotónio Almeida e David R. J. Chillingworth, que me ajudaram em várias dificuldades relacionadas com esta tradução.

(Introdução, tradução e notas de F. J. Craveiro de Carvalho)

Cartoon