CANTO DÉLFICO

Jorge Neves
Universidade de Coimbra
neves@mat.uc.pt

O JOGO DE BIGGS

Este Canto Délfico tem mote um divertido jogo solitário. O título é reminiscente da metáfora usada por Norman Biggs em [2] para descrever um jogo de fichas sobre um grafo com contornos semelhantes ao nosso. A análise que vamos fazer tem raízes profundas na teoria dos sistemas lineares sobre curvas algébricas e segue de perto o artigo de Baker e Norine, [1]; todavia, a nossa abordagem será totalmente elementar.

O tabuleiro do jogo de Biggs tem a estrutura de um grafo conexo arbitrário, como aquele que mostramos a seguir. Nos vértices do grafo há fichas brancas e pretas que o jogador manipula partindo de uma configuração inicial. Pensemos em cada vértice como tendo um certo número inteiro de euros. Cada ficha corresponde em valor absoluto a um euro: um euro *positivo* se a ficha for branca e *negativo* se a ficha for preta. Uma jogada consiste em escolher um vértice e transferir um euro para cada um dos seus vizinhos ou, inversamente, transferir para o vértice escolhido um euro de cada um dos seus vizinhos. Se no decorrer do jogo uma ficha branca encontrar uma preta no mesmo vértice, o jogador pode retirá-las do tabuleiro.

Por exemplo, na figura 1, o vértice v_4 pode transferir um euro para cada um dos seus três vizinhos. Após essa jogada, os vértices v_2 e v_3 ficam com um euro, o vértice v_5 com dois euros e v_4 fica a zero. Alternativamente, podemos obrigar o vértice v_5 a transferir um euro para os seus vizinhos. Os vértices v_2 e v_3 ficariam com um euro, v_4 com quatro euros, v_6 com zero euros e v_5 com menos três euros. Seria então necessário fornecer ao tabuleiro duas novas fichas brancas e duas novas fichas pretas; de que supomos haver um *stock* infinito. Se tivéssemos escolhido v_6 e fizéssemos o seu único vizinho dar-lhe um euro, v_5 e v_6 ficariam ambos a zero e o jogador recolheria do tabuleiro a ficha branca e a ficha preta no vértice v_6.

Diremos que um vértice está em *dívida* se ele tiver em caixa uma quantia negativa de euros. O objetivo do jogo é chegar a uma configuração em que **nenhum** vértice esteja em dívida, partindo da configuração inicial dada. É possível jogar com

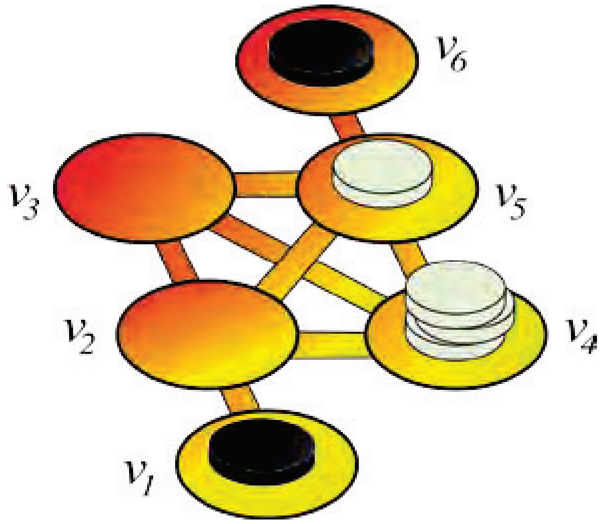

Figura 1: O tabuleiro do jogo

lápis e papel, mas, se tiver consigo um jogo de damas, desenhe o grafo em tamanho grande numa folha de papel e use as damas como fichas, vale a pena.

NOTAÇÃO

Para falar da matemática do jogo de Biggs é preciso uma boa notação. Uma configuração pode ser representada por uma soma formal de múltiplos inteiros dos vértices do grafo. O coeficiente de um vértice está para o número de euros que ele tem. Por exemplo, a configuração na figura 1 é dada por $\boldsymbol{u} = -v_1 + 3v_4 + v_5 - v_6$. Vejamos como esta notação pode facilitar o registo das jogadas feitas. Suponhamos que na configuração $\boldsymbol{u}$ obrigamos v_4 a dar um euro a cada um dos seus vizinhos. A configuração resultante é então $\boldsymbol{u} - 3v_4 + v_2 + v_3 + v_5 = -v_1 + v_2 + v_3 + 2v_5 - v_6$.

O jogo de Biggs com configuração inicial $\boldsymbol{u}$ tem solução $v_3 + v_5$. Bastam três jogadas: v_6 pede um euro a v_5; v_1 pede um euro a v_2 e a v_4 dá um euro a cada um dos seus vizinhos. Na nossa notação:

$$\boldsymbol{u} + (v_6 - v_5) + (v_1 - v_2) + (-3v_4 + v_2 + v_3 + v_5).$$

É claro que $v_3 + v_6$ também é solução.

Experimente o jogo de Biggs com a configuração inicial $\boldsymbol{v} = -2v_2 + v_3 + 3v_4 + v_5 - v_6$, *ilustrada na figura 2.*

JOGADAS MÚLTIPLAS

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto do conjunto dos vértices do grafo. O que é que acontece se cada um dos elementos de $\mathcal{S}$ der um euro aos seus vizinhos? No final, cada dois vértices desse conjunto ligados por uma aresta terão trocado entre si um euro e, logo, o saldo entre esses dois vértices será nulo. Para todos os efeitos, ao fim de todas as trocas, é como se cada vértice de $\mathcal{S}$ desse um euro apenas aos seus vizinhos que estiverem *fora* de $\mathcal{S}$.

Por exemplo, se $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no jogo de Biggs ilustrado na figura 2, no final v_1 não transfere moeda pois não tem vizinhos fora de $\mathcal{S}$ e cada um dos vértices v_2, v_3 e v_4 transfere um euro para v_5, que é o seu único vizinho fora de $\mathcal{S}$, a configuração final é $-3v_2 + 2v_4 + 4v_5 - v_6$.

Analogamente, se cada um dos vértices de $\mathcal{S}$ pedisse um euro a cada um dos seus vizinhos, no final é como se apenas aqueles vizinhos que estão fora de $\mathcal{S}$ tivessem contribuído. É fácil ver que a configuração final não depende da ordem pela qual os vértices de $\mathcal{S}$ transferem moeda.

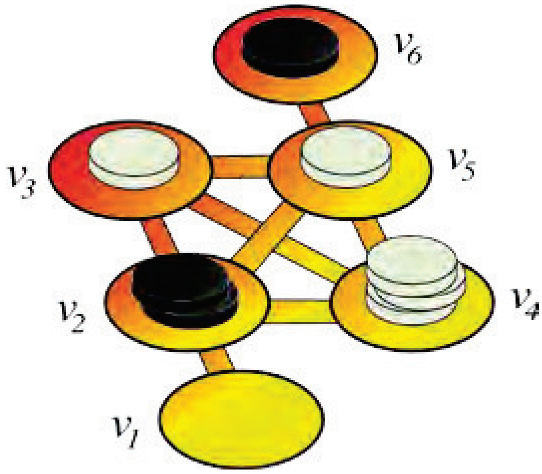

Figura 2: $\boldsymbol{v} = -2v_2 + v_3 + 3v_4 + v_5 - v_6$.

Este tipo de jogada, que corresponde a uma sequência de jogadas elementares, pode ser usada para encurtar o tempo de jogo. E não é o único tipo de *jogada múltipla*; podemos obrigar um vértice a dar $k > 1$ euros a cada um dos seus vizinhos, etc.

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Diremos que duas configurações $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ são equivalentes se for possível passar de $\boldsymbol{w}_1$ para $\boldsymbol{w}_2$ através de um número finito de jogadas. O conjunto das configurações equivalentes a uma dada configuração $\boldsymbol{w}$ designa-se por classe de equivalência de $\boldsymbol{w}$. Não é difícil mostrar que cada classe de equivalência é um conjunto infinito. A classe de equivalência de uma configuração no jogo de Biggs nada mais é do que o conjunto de todas as configurações que é possível obter a partir da configuração inicial. Uma forma mais conceptual de dizer que é possível resolver o quebra-cabeças de Biggs com uma dada configuração inicial é dizer que na correspondente classe de equivalência existe uma configuração sem vértices em dívida.

Ora, há configurações em cuja classe de equivalência jamais encontrará uma configuração sem vértices em dívida. Nalguns casos existe uma forma simples de o demonstrar; basta que o grau da configuração, que, por definição, é a soma dos coeficientes dos vértices, seja um inteiro negativo. É assim pois todas as configurações numa classe de equivalência têm igual grau. Isto é transparente usando a notação para uma jogada elementar que demos anteriormente.

CONFIGURAÇÕES REDUZIDAS

O grau de $\boldsymbol{v}$, a configuração inicial do jogo de Biggs que lhe propus, não é negativo, mas como já deve ter percebido esse jogo é impossível... Não há, na infinita classe de equivalência de $\boldsymbol{v}$, uma única configuração sem vértices em dívida. Como prová-lo? Isso é o que veremos de seguida.

Fixemos um vértice, v_i. Diremos que uma configuração é reduzida em v_i se:

(A) todo o vértice distinto de v_i não se encontrar em dívida e se

(B) sempre que um subconjunto dos vértices $\mathcal{S}$, a que não pertença v_i, der um euro a cada um dos seus vizinhos então um dos vértices de $\mathcal{S}$ entra em dívida.

Por exemplo, $\boldsymbol{w} = 2v_5 - 3v_6$ não é reduzida em v_6 pois (B) não se verifica: os vértices do conjunto $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ podem dar sem que nenhum deles no final fique em dívida. Se a correspondente jogada for feita, obtém-se $v_5 - 2v_6$ que é reduzida em v_6. Notemos entretanto que $v_5 - 2v_6$ já não é reduzida em v_5, pois (A) não se verifica.

Dada uma configuração, é possível obter uma configuração *equivalente*, reduzida em v_i, em dois tempos. Num primeiro passo, às custas de v_i, livramos todos os restantes vértices de dívida; com isto consegue-se que (A) seja satisfeita.[1] No segundo passo corre-se iterativamente uma ordenação $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ dos subconjuntos dos vértices do grafo que não contêm v_i. Sempre que seja possível que os vértices de $\mathcal{S}_i$ deem um euro aos seus vizinhos sem que no final um deles entre em dívida, essa jogada é concretizada e regressa-se ao início da lista. Quando percorrermos a lista do início ao fim sem poder fazer uma única jogada, é porque a condição (B) é satisfeita, ou seja, é porque a configuração encontrada é reduzida em v_i.

Voltemos à configuração $\boldsymbol{v}$, que era a configuração inicial do jogo de Biggs proposto, e calculemos a sua configuração reduzida em v_1. Seguindo o protocolo v_1, deverá emprestar indiscriminadamente até que exista suficiente moeda a circular entre $v_2, \ldots, v_6$ que salde todas as dívidas. Podemos começar por obrigar v_1 a dar dois euros ao seu único vizinho, v_2, e de seguida, fazer com que v_6 receba um euro do seu único vizinho, v_5. O resultado é $-2v_1 + v_3 + 3v_4$, que ainda *não* é reduzida em v_1. No segundo tempo do processo de redução temos de fixar uma ordem para os subconjuntos de

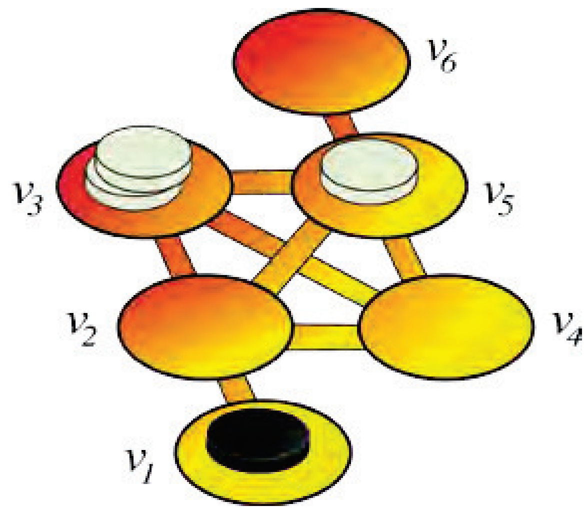

Figura 3: Configuração reduzida em v_1.

$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Escolhemos uma que comece assim:

$$\{v_4\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_6\}, \ldots$$

Veremos que não importa o que vem a seguir. Começamos com o vértice v_4, que dá um euro aos seus vizinhos. Regressando ao início, v_4 está a zero e já não pode dar. O próximo é o conjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ que está em condições de dar. Fazemos a correspondente jogada e regressamos ao início da lista. Desta vez nem $\{v_4\}$ nem $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ podem dar mas $\{v_6\}$ pode e fá-lo. A figura 3 ilustra o resultado.

Mostremos que no próximo *ritornello* do método nenhum subconjunto não-vazio de vértices de $\{v_2, \ldots, v_6\}$ está em condições de dar. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\mathcal{S}$ é um tal subconjunto arbitrário de $\{v_2, \ldots, v_6\}$. Como v_2 está ligado a v_1 e não tem um euro em caixa para lhe dar, ele não pode pertencer a $\mathcal{S}$. Sendo assim, v_4 também não pode pertencer a $\mathcal{S}$. De seguida são, sucessivamente, v_5, v_3 e v_6 que não podem pertencer a $\mathcal{S}$, ou seja conclui-se que $\mathcal{S}$ é vazio: absurdo!

Em conclusão, $-v_1 + 2v_3 + v_5$, que é equivalente a $\boldsymbol{v}$, é reduzida em v_1.

UNICIDADE

Veremos que a noção de configuração reduzida joga um papel fundamental na análise de resolubilidade de um jogo de Biggs. Nessa análise, é crucial saber que em cada classe de equivalência há apenas uma configuração reduzida em v_i. Não é difícil demonstrar que assim é.

Comecemos por tirar o máximo proveito da nossa notação. Suponhamos que um vértice qualquer v_k dá aos seus vizinhos $\alpha_k > 0$ euros. Denotemos os seus vizinhos por $v_{l_1^k}, \ldots, v_{l_{r_k}^k}$. A configuração que resulta dessa jogada obtém-se adicionando

$$\alpha_k(-r_k v_k + v_{l_1^k} + \cdots + v_{l_{r_k}^k})$$

à configuração de partida. (Na jogada inversa, em vez de somar, subtraímos.) Sejam então w_1 e w_2 duas configurações. Suponhamos que ambas são reduzidas em v_i e que w_2 se obtém a partir de w_1 através de um número finito de jogadas (por outras palavras, w_1 e w_2 são equivalentes). Então, w_2 obtém-se de w_1 somando um certo número de expressões como a anterior. Podemos dizer que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$w_2 = w_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(r_k v_k - v_{l_1^k} - \cdots - v_{l_{r_k}^k}),$$

onde n é o número total dos vértices do grafo. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, então isso quer dizer que w_2 se obtém de w_1 obrigando todos os vértices a dar a mesma quantia a cada um dos seus vizinhos (caso o valor de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seja positivo) ou a receber a mesma quantia de cada um dos seus vizinhos (caso o valor seja negativo). Mas isso em nada altera a configuração w_1, por outras palavras, $w_2 = w_1$, que é o que queremos mostrar. Podemos então supor, com vista a um absurdo, que há pelo menos dois inteiros distintos entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos vértices para os quais o correspondente coeficiente α_k é o máximo do conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Trocando w_1 com w_2, podemos supor que o vértice v_i não pertence a $\mathcal{S}$. Ora para cada $v_k \in \mathcal{S}$, denotando por $\beta_k, \gamma_k \geq 0$ os seus coeficientes em w_1 e w_2, respetivamente, tem-se

$$\gamma_k = \beta_k + \alpha_k r_k - \alpha_{l_1^k} - \cdots - \alpha_{l_{r_k}^k} \iff$$
$$\gamma_k = \beta_k + (\alpha_k - \alpha_{l_1^k}) + \cdots + (\alpha_k - \alpha_{l_{r_k}^k}).$$

Como $(\alpha_k - \alpha_{l_1^k}) + \cdots + (\alpha_k - \alpha_{l_{r_k}^k})$ é maior ou igual ao número de vizinhos que v_k tem fora de $\mathcal{S}$, e isto se verifica para qualquer $v_k \in \mathcal{S}$, deduz-se que se em w_2 todos os vértices do conjunto $\mathcal{S}$ derem, nenhum deles contrai dívida, o que é um absurdo. Note que a hipótese de que ambas w_1 e w_2 são reduzidas em v_i é necessária devido à (eventual) troca que referimos anteriormente.

RESOLUBILIDADE

Para o jogo de Biggs as consequências da unicidade não poderiam ser melhores. Suponhamos que o jogo tem solução. Seja v_i um vértice arbitrário do grafo e calculemos a reduzida em v_i da solução. Como a condição (A) é automaticamente satisfeita, saltamos o primeiro passo da redução. Por outro lado, o segundo passo da redução não induz dívidas a nenhum vértice. Isto quer dizer que a reduzida da solução tem de ser ela mesma uma solução do quebra-cabeças. Como, graças à unicidade, a reduzida da solução coincide com a reduzida da configuração inicial, deduz-se que um jogo de Biggs é resolúvel se e só se a reduzida da configuração inicial em qualquer vértice v_i for uma solução. No jogo que lhe propus, a reduzida de v em v_1 é $-v_1 + 2v_3 + v_5$, que não é uma solução.

JOGUE PELO SEGURO

Parece que não há prazer garantido para quem quiser criar os seus próprios jogos partindo de configurações arbitrárias. Se, num jogo que não parece melhorar de jogada para jogada, quiser provar que ele é impossível então poderá ter de enumerar uma lista de todos os subconjuntos de um conjunto de vértices do grafo, o que não é lá muito prático. No entanto, saiba que se o grau da configuração inicial for suficientemente grande, o jogo de Biggs é sempre possível! Isto é o que Baker e Norine demonstram em [1]. Basta que ele seja maior ou igual ao *primeiro número de Betti* do grafo. Isto é, basta que o grau da configuração inicial seja maior ou igual ao número de arestas menos o número de vértices mais um, $g = |E_G| - |V_G| + 1$. Volte atrás e calcule este invariante para o nosso grafo. O grau de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ está mesmo àquem...

BIBLIOGRAFIA

[1] Mathew Baker e Serguei Norine, "Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph", *Advances in Mathematics*, **215** (2007), 766--788.

[2] Biggs, N. L. "Chip-firing and the critical group of a graph", *J. Algebraic Combin.* **9** (1999), nº. 1, 25--45.

[1] Biggs chamou a v_i o *governo* – já que este (o nosso não) tem o poder de emitir mais moeda quando a economia entra em crise.