EDUARDO MARQUES DE SÁ
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

QUADRADOS, QUADRÍCULAS E A HIPÉRBOLE DE OBSERVAÇÃO DUMA ELIPSE

Num Canto da *Gazeta de Matemática* anterior foram propostos problemas sobre a representação em perspectiva linear e a observação de quadros concebidos de acordo com essa teoria. Neste Canto sugerimos mais problemas e algumas respostas das quais emerge o curioso conceito de hipérbole de observação duma elipse.

COMO DEVE «VER-SE» O CUBO?

O primeiro problema a considerar é o da figura 1, cujo título sugere tratar-se da imagem duma caixa cúbica, com uma face transparente, através da qual se vê o interior em perspectiva. Acerca dela, pergunta-se: *qual é o ponto de observação no qual o leitor deve colocar o seu olho para ver algo que o nosso cérebro "aceite" ser um cubo?*

Na figura traçou-se a mediatriz dos lados verticais dos quadrados que determina os pontos A, B, C, D. A primeira preocupação de quem observa um quadro em perspectiva rigorosa é determinar o seu centro perspectivo, isto é, a projecção ortogonal, sobre a tela, do olho do pintor quando executou a obra; claro que o centro perspectivo da figura 1 é o

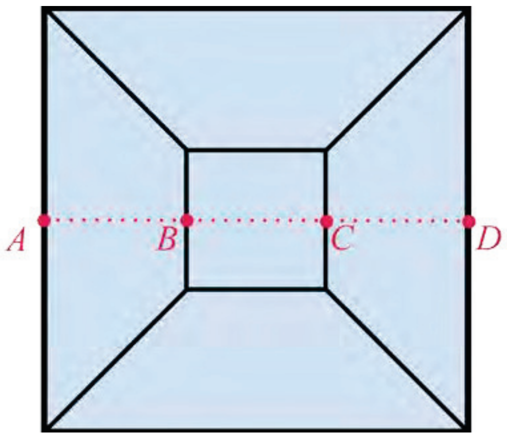


Figura 1. Interior dum cubo.

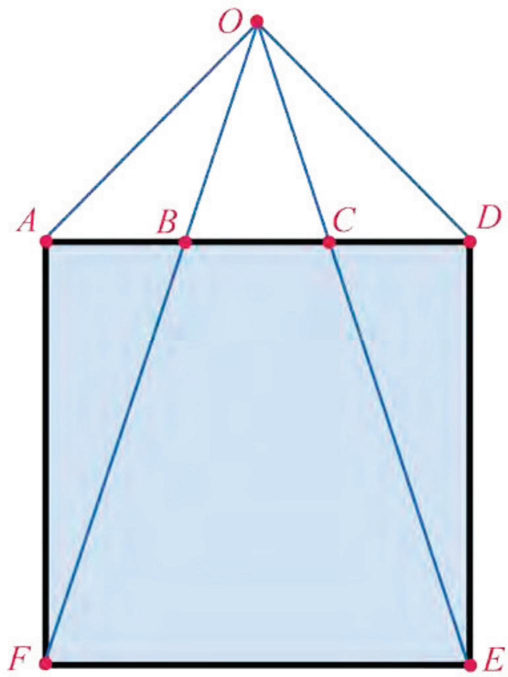


Figura 2. Cubo em observação.

centro geométrico dos quadrados; recorda-se que o tal centro é o ponto de fuga do feixe de rectas (do real retratado no quadro) perpendicular ao plano da tela – o ponto de encontro das diagonais dos quadrados da figura 1. Portanto, deve o leitor observar a figura com um só olho, de modo a que o eixo óptico seja perpendicular à folha de papel e passe pelo centro dos quadrados.

Falta saber a que distância deve colocar-se a pupila. Na figura 2 intervém o geómetra, bem ao jeito dos arquitectos renascentistas, como Leon Alberti, e dos matemáticos pintores cujo representante maior foi Piero della Francesca; a figura representa o cubo, em projecção ortogonal, sendo observado, do ponto O, pelo "artista" que desenhou a figura 1, da qual o grande quadrado está agora representado de topo pelo segmento $[AD]$ e o quadrado pequeno por $[EF]$. Os pontos A, B, C, D estão agora representados sobre a face superior do cubo. Podemos imaginar que o observador desenha o seu quadro num vidro assente sobre a face superior do cubo, como num perspectógrafo. Da pirâmide visual mostram-se as linhas OA, OD, OE, OF; os pontos B e C são as intersecções com AB das linhas de vista OD e OE. Como $\overline{BC} = 1/3\overline{AD}$, a distância de O a AD é metade do lado do quadrado maior. Isto conduz às instruções para bem observar a figura 1:

> *Olhe a figura com um só olho de modo a que o eixo óptico seja perpendicular ao plano do papel e passe pelo centro dos quadrados, colocando a pupila a uma distância igual a metade do lado do quadrado maior.*

OS PROBLEMAS DA BOLA-8

Esquecendo os pormenores (oitos, sombras e reflexos) e olhando apenas para as duas imagens da bola-8 como discos, um circular e o outro elíptico, o problema a resolver é o seguinte:

> *Existem pontos do espaço acima da folha de papel dos quais o seu olho vê o segundo disco como disco circular. Qual é o lugar geométrico desses pontos?*

Figura 3. Bola-8, circular e "esticada".

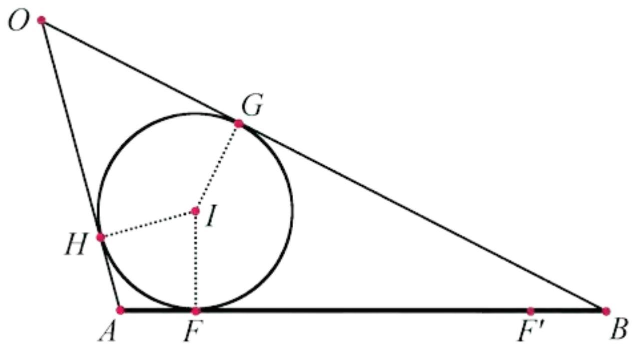


Figura 4. Esfera de Dandelin.

Precisemos um pouco a questão; um disco circular traçado num papel (como o da primeira bola-8) vê-se como disco na sua "circularidade plena", quando e só quando o observamos com o eixo óptico do olho perpendicular ao plano do desenho e passando pelo centro do círculo. Isto acontece se e só se o prisma visual do disco for um cone de revolução. Portanto, o problema proposto pode reformular-se do seguinte modo: *dada uma elipse no espaço tridimensional, determine o lugar geométrico dos vértices dos cones de revolução que têm a dita elipse por secção plana.* Na figura 4 a elipse está de topo, representada pelo segmento $[AB]$, o seu eixo maior; os pontos F e F' são os focos. Supomos que, vista de O, o cone visual da elipse é de revolução. O plano da figura é o das geratrizes OA e OB, que contém o eixo de revolução do cone. Na figura esboçou-se uma esfera de Dandelin, necessariamente tangente ao plano da elipse no foco mais próximo de O. Ela tem centro I, o incentro do triângulo $[OAB]$.

Da identidade $2\overline{AF} + 2\overline{BG} + 2\overline{OH} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{OA}$ resulta que

$$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{FF}'. \qquad (1)$$

Note-se que $\overline{FF}'$ é constante. Recorde-se, da chamada "definição geométrica" da hipérbole (prima do método do jardineiro para traçar elipses), o lugar geométrico dos pontos O que satisfazem (1) é uma hipérbole de focos A, B. Portanto, o ponto O está sobre a hipérbole $\mathscr{H}$, de plano perpendicular ao da elipse, que tem por vértices os focos da elipse e por focos os vértices da elipse. Deixa-se ao leitor a prova (simples) de que todo o ponto O da hipérbole, excepto F e F', é um *bom* ponto de observação, isto é, vértice dum cone de revolução que tem a nossa elipse por secção plana. Podemos, pois, dizer que $\mathscr{H}$ é a *hipérbole de observação da elipse*. Portanto,

> *o lugar geométrico que o problema pede é a parte da hipérbole de observação da elipse que fica estritamente acima do plano da folha de papel.*

INTERPRETAÇÃO CARTESIANA

Introduzamos um sistema cartesiano ortonormado, centrado no centro da elipse, com eixo dos x's segundo o eixo maior da elipse, eixo dos y's segundo o eixo menor e eixo dos z's ortogonal ao plano da elipse. Sendo a e b ($a > b$) os semi-eixos da elipse, a sua semi-distância focal é $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ e as suas equações são

$$z = 0\,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

É fácil ver que as equações da hipérbole $\mathscr{H}$ são

$$y = 0\,, \quad \frac{x^2}{f^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Os bons pontos de observação são os (x, y, z) que satisfazem as equações (2).

No caso da bola-8 esticada, adoptamos o raio da bola como unidade de medida, o que dá $b = 1$, $a = 3$ e $f = \sqrt{8} \approx 2.83$. Na figura 5, representa-se a hipérbole $\mathscr{H}$ de observação da bola-8 esticada; aqui, a elipse muito oblonga representa uma perspectiva da segunda imagem *bidimensional* da figura 3, despojada do seu conteúdo gráfico. O segmento $[AB]$ é, pois, o eixo maior da bola-8 esticada; para bem a observar, o leitor deverá colocar a pupila dum olho num ponto da dita hipérbole e orientar o eixo óptico segundo a bissectriz do ângulo $\widehat{AOB}$ (o eixo do cone visual).

Escólio. Em geral, os quadros renascentistas executados por matemáticos como Piero della Francesca possuem informação suficiente para determinar um único ponto de observação. Como vimos, não é esse o caso na observação duma elipse, sem conteúdo gráfico, de que apenas se sabe ser representação perspectiva duma circunferência.

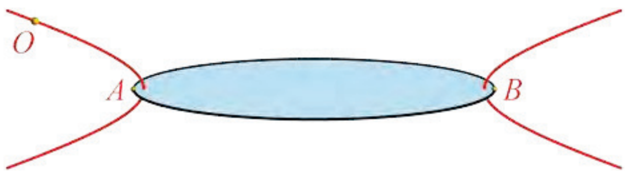


Figura 5. A hipérbole de observação.

A ELIPSE DE *MAKE POVERTY HISTORY*

Podemos desde já resolver o problema 5 do Canto Délfico anterior. Tratava-se da anamorfose de Julian Beever, que aqui se reproduz para reavivar a memória. Pergunta-se: qual o eixo menor da elipse, sabendo que o eixo maior é 13 m e que o ponto de observação óptima está colocado a uma altura de 1.5 m, na vertical dum ponto do solo que dista 2 m do referido eixo maior.

Duas notas prévias: em primeiro lugar, há um só ponto O de observação óptima, dada a complexidade do conteúdo da imagem de Beever; por outro lado, esse ponto está sobre a hipérbole de observação da elipse (cf. figura 5).

O semi-eixo maior mede, pois, $a = \frac{13}{2}$ e, feitas as contas com o sistema cartesiano acima adoptado, o ponto O tem coordenadas $x = a + 2 = 8.5$, $y = 0$, $z = 1.5$. De (5) vem

$$\frac{8.5^2}{8.5^2 - b^2} - \frac{1.5^2}{b^2} = 1 \;\therefore\; b \approx 1.65\,\text{m}$$

Portanto, o eixo menor da elipse mede ≈ 3.30 m.

E O CONTEÚDO DA BOLA-8?

Um dos problemas colocados no Canto Délfico anterior foi este: *tome agora em conta os conteúdos das imagens bidimensionais, nomeadamente: oitos, sombras e reflexos. Existe algum ponto do espaço do qual se consegue observar a segunda imagem e ver uma imagem matematicamente semelhante à primeira imagem da bola-8?*

Para vermos que a resposta a tal questão é negativa, vamos dar uma outra volta ao problema. Substitua-se o conteúdo da bola-8 por uma quadrícula como a da figura 6. Coloque-se o círculo quadriculado na posição indicada na figura 7, de modo a que o cone visual seja de revolução; nessa situação, o nosso olho, em O, vê o disco na sua circularidade plena. Projecte-se de O a grelha num outro plano (horizontal, na figura 7). Se retirarmos de cena o disco circular e olharmos de O para a grelha projectada no plano horizontal, o nosso olho continua a ver a figura 6!

Observe agora, na figura 8, a projecção da grelha[1] no

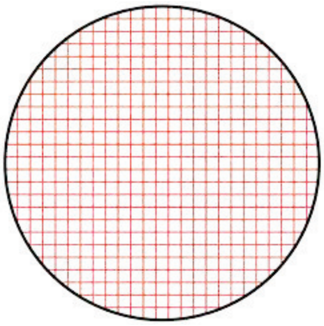


Figura 6. Quadrícula base.

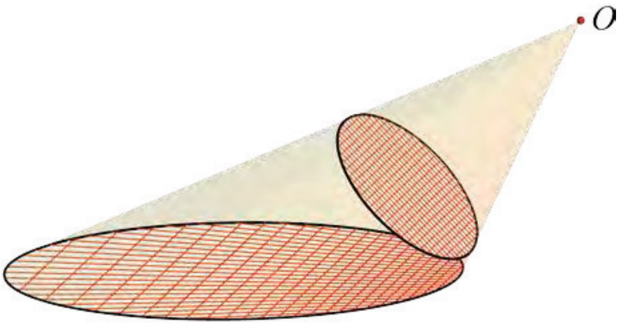


Figura 7. Projecção da grelha da figura 6.

plano horizontal (cf. figura 7) comparada com a malha que se obtém esticando linearmente a figura 6 tal como se fez para obter da bola-8 a imagem elíptica da figura 3. A diferença visualmente clara entre as duas deformações da quadrícula inicial ilustra quão ingénua é a ideia de que observar "de esguelha" uma imagem esticada pode reconstituir a imagem original com todo o seu conteúdo.

OUTROS PROBLEMAS

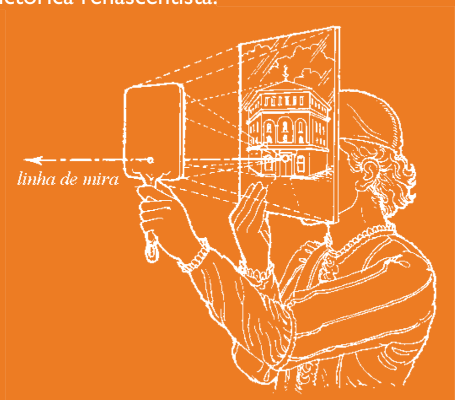
Mantém-se, no entanto, o problema de conceber argumentação matemática sólida que prove as impressões que o grafismo acima sugeriu. Acrescentamos dois problemas aos cinco do Canto Délfico do n.º 174 da *Gazeta de Matemática*:

Problema 6. *As rectas que atravessam, da esquerda para a direita, a primeira imagem da figura 8 parecem convergir num ponto. Será isso verdade? E, se assim for, que ponto é esse, que relação tem com o cone visual da figura 7?*

Problema 7. *Para a primeira imagem da figura 8, de que pontos da hipérbole de observação da elipse se vê uma imagem matematicamente semelhante à da figura 6?*

O autor escreve de acordo com a grafia antiga

O método (de pôr e tirar grelha) tem fortes semelhanças com a experiência atribuída a Filippo Brunelleschi, por volta de 1420, para ilustrar leis da perspectiva por ele então redescobertas. A figura mostra-o, de acordo com a lenda, segurando na mão direita um desenho do Baptistério de S. João e, na esquerda, um espelho; quando este é retirado, Filippo vê o seu Baptistério, "tal qual" o desenho que executara de acordo com leis matemáticas que viriam a marcar a prática pictórica renascentista.



Se non è vero...

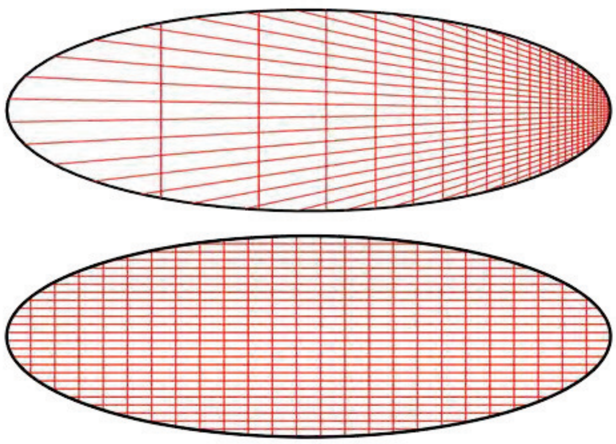


Figura 8. Duas malhas bem diferentes.

[1] Para caber numa coluna da *Gazeta de Matemática*, a elipse da figura 7 foi concebida com excentricidade bem menor do que as das figuras 8 e 3.