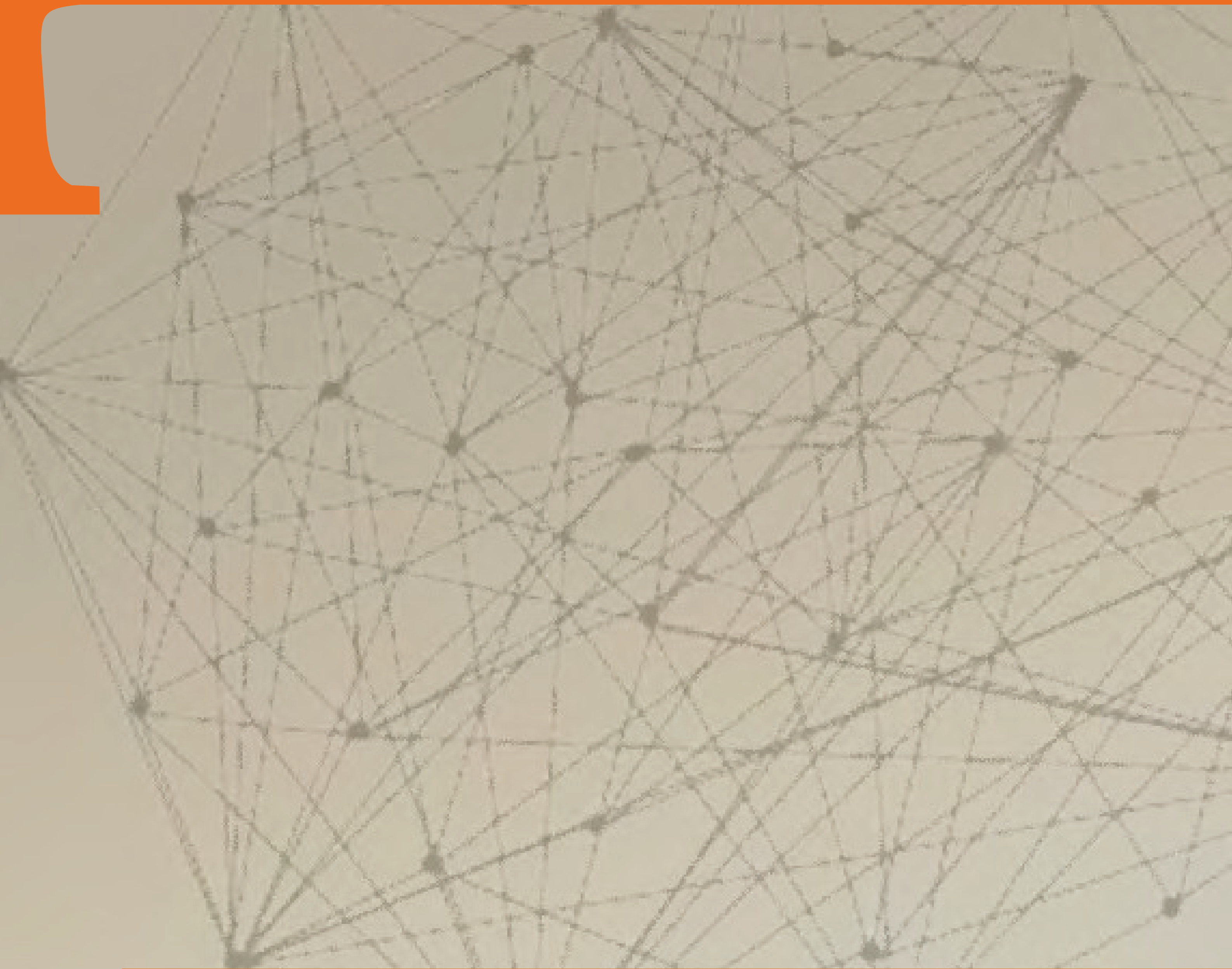


O QUE É UM MATROIDE?

ROSÁRIO FERNANDES
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
mrff@fct.unl.pt

1. ORIGEM DO TERMO MATROIDE

Tal como o nome sugere, matroide vem da palavra matriz. O conceito de matroide surgiu em 1935 [8] quando Whitney tentou generalizar a noção de dependência linear de um conjunto de vetores, pertencentes a um dado espaço vetorial. Noção esta conhecida por todos os que frequentaram uma disciplina elementar de álgebra linear. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.1 *Seja A a seguinte matriz, com três linhas, seis colunas e preenchida por números reais:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Numerando as colunas da matriz A da seguinte forma,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

e simplificando a notação, podemos designar por $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto das colunas da matriz A. Reparando nas colunas 1, 4, 5, se tentarmos encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

teremos de encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é equivalente a encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}.$$

A única solução deste sistema é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto significa que o subconjunto de E formado pelas colunas 1, 4, 5 de A é linearmente independente. Este subconjunto não era linearmente independente se o sistema anterior tivesse mais do que uma solução.

Sendo $\mathcal{I}_1$ a coleção de subconjuntos de E, formados por colunas da matriz A, linearmente independentes, então, podemos afirmar que $\mathcal{I}_1$ tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de $E - \{6\}$, exceto os conjuntos $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5\}$.

$\square$

Outra noção, menos conhecida, mas que nos últimos anos tem sido muito divulgada, é a de grafo. Este pode ser definido como um conjunto de pontos (chamados vértices do grafo) e uma coleção de linhas a unir determinados pontos (chamadas arestas do grafo).

São passados quase 80 anos desde que pela primeira vez surgiu o termo matroide e este continua desconhecido da maioria dos amantes da matemática. Apesar disto, os matroides têm um papel muito importante em diversas áreas científicas. Álgebra, geometria, teoria da computação, investigação operacional são algumas das que os utilizam, muitas vezes sem o saberem. O pai da teoria dos matroides foi Whitney, mas para o seu desenvolvimento contribuiram grandes investigadores a nível mundial, destacando-se entre os portugueses o nome de Raúl Cordovil. Neste artigo é apresentada, de uma maneira muito leve, a noção de matroide.

Exemplo 1.2 *Na figura 1 pode ver-se o grafo G com o conjunto de vértices,* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *e a coleção das arestas,* $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.

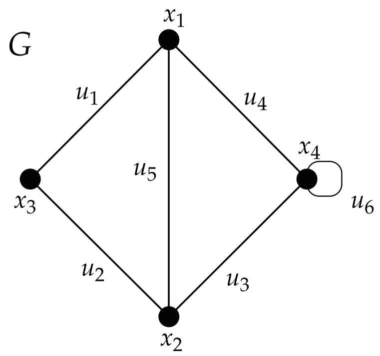


Figura 1.

□

Para falarmos da noção de dependência em grafos, necessitamos de um outro conceito.

Um ciclo é uma sequência alternada de vértices e arestas de um grafo, iniciada e terminada num vértice, tal que cada aresta tem uma extremidade no vértice que imediatamente a precede na sequência e outra extremidade no vértice que imediatamente a sucede na sequência. Além disto, num ciclo, todas as arestas são distintas e todos os seus vértices também, à exceção do primeiro e do último, que são o mesmo.

Reparando na figura 1:

- a sequência $x_3, u_1, x_1, u_5, x_2, u_2, x_3$ é um ciclo do grafo G,
- a sequência x_4, u_6, x_4 também é um ciclo do grafo G (ciclos com uma única aresta chamam-se laços).

Porque nomeando uma aresta ficam definidos os vértices que são extremidades dessa aresta, podemos omitir os vértices quando estamos a escrever um ciclo. Pensando nos ciclos que exemplificámos anteriormente no grafo G, poderíamos escrever o primeiro ciclo como u_1, u_5, u_2, e o segundo, que é um laço, como u_6. Com o conceito de ciclo estabelecido, podemos falar da noção de dependência nos conjuntos constituídos por arestas de um grafo.

Exemplo 1.3 *Olhando para o grafo G, e sendo $\mathcal{I}_2$ a coleção dos subconjuntos de U, formados por arestas do grafo G, que não contêm nenhum ciclo do grafo, então, podemos afirmar que $\mathcal{I}_2$ tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de* $U - \{u_6\}$, *exceto os conjuntos* $\{u_1, u_2, u_5\}$ *e* $\{u_3, u_4, u_5\}$.

□

Repare na semelhança que existe entre $\mathcal{I}_1$ do exemplo 1.1 e $\mathcal{I}_2$ do exemplo 1.3. Whitney reparou nesta semelhança e reparou também nas seguintes três propriedades que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ verificavam: (designando por $\mathcal{I}$ indiferentemente as coleções $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$)

I_1) $\emptyset$ é elemento de $\mathcal{I}$.

I_2) Se $Y \in \mathcal{I}$ e $Z \subseteq Y$, então $Z \in \mathcal{I}$.

I_3) Se $Z, Y \in \mathcal{I}$ e $|Z| = |Y| + 1$, então existe $z \in Z - Y$ tal que $Y \cup \{z\} \in \mathcal{I}$ (em que $|Y|$ e $|Z|$ designam o número de elementos dos conjuntos Y e Z, respetivamente).

Foi a partir destas três propriedades que Whitney definiu o conceito de matroide. Portanto, matroide M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$é uma coleção de subconjuntos de E que verificam as três propriedades anteriores, isto é, as propriedades $I_1) - I_3)$ (ver [5, 2, 3, 7]).

Se $M = (E, \mathcal{I})$ é um matroide, então os conjuntos de $\mathcal{I}$ chamam-se conjuntos independentes do matroide M. O conjunto E é o suporte do matroide M.

Pelo que expusemos anteriormente, o conjunto das colunas da matriz A, do exemplo 1.1, que designámos por E, é o suporte do matroide $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$. Da mesma forma, o conjunto das arestas do grafo G é o suporte do matroide $M_2 = (U, \mathcal{I}_2)$ (exemplo 1.3).

O termo *matroid* não foi universalmente aceite. Ao longo dos anos vários nomes foram surgindo para este conceito. O que mais tem perdurado é o de *Combinatorial Geometry*, dado por Gian-Carlo Rota, a quem se deve o primeiro livro sobre este assunto, publicado em 1970 [1]. Apesar de não estar nos objetivos de Whitney quando tentou unificar a dependência na álgebra linear e na teoria dos grafos, o conceito de matroide tornou-se importantíssimo em diversas áreas científicas: álgebra, geometria, teoria da computação, investigação operacional, ...

2. MATRIZES E MATROIDES

Matroides construídos a partir das colunas de uma determinada matriz D, pelo processo descrito no exemplo 1.1, chamam-se matroides vetoriais e denotam-se por $M[D]$.

Na secção anterior, mencionámos que as coleções $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ dos matroides construídos nos exemplos 1.1 e 1.3 eram semelhantes. Se olharmos para os conjuntos suporte destes matroides, ou seja, o conjunto E das colunas da matriz A e o conjunto U das arestas do grafo G, eles têm o mesmo número de elementos e conseguimos estabelecer uma correspondência entre eles, por forma a passar dos conjuntos independentes de um dos matroides para os conjuntos independentes do outro matroide. Basta pensarmos na seguinte bijecção (correspondência injetiva e sobrejetiva) de E (conjunto das colunas da matriz A) para U (conjunto das arestas do grafo G),

$$\phi : E \to U \text{ tal que } \phi(i) = u_i, \text{ para } i = 1,2,3,4,5,6.$$

Mais, esta bijecção transforma os elementos de $\mathcal{I}_1$ em elementos de $\mathcal{I}_2$. O que descrevemos com os dois matroides construídos na secção anterior é uma relação de equivalência que se define nos matroides.

Quando temos dois matroides $M_3 = (E_3, \mathcal{I}_3)$ e $M_4 = (E_4, \mathcal{I}_4)$ para os quais existe uma correspondência bijectiva $\phi : E_3 \to E_4$ tal que

$$Y \in \mathcal{I}_3 \text{ se, e só se, } \phi(Y) \in \mathcal{I}_4,$$

dizemos que os matroides M_3 e M_4 são isomorfos.

Se um matroide M é isomorfo a um matroide vetorial $M[C]$ em que C é uma matriz de números reais, dizemos que M é $\mathbb{R}$-representável e a matriz C diz-se uma $\mathbb{R}$-representação de M.

Com esta definição e com o que já afirmámos, podemos concluir que os matroides M_1 (do exemplo 1.1) e M_2 (do exemplo 1.3, construído com as arestas do grafo G) são isomorfos. Portanto, a matriz A do exemplo 1.1 é uma $\mathbb{R}$-representação de M_2.

Prova-se que todos os matroides que são construídos com o conjunto das arestas de um determinado grafo são $\mathbb{R}$-representáveis (ver [4]).

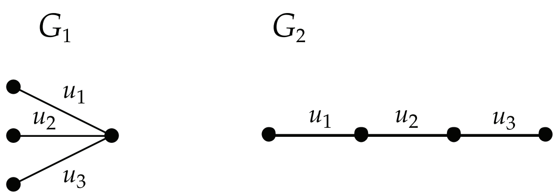
3. GRAFOS E MATROIDES

Matroides construídos a partir das arestas de um determinado grafo H, pelo processo descrito na secção 1, com o grafo G, chamam-se matroides cíclicos e denotam- -se por $M(H)$.

Se um matroide M é isomorfo a um matróide cíclico $M(P)$, para algum grafo P dizemos que o matroide M é gráfico e que P é uma representação gráfica de M.

Como é evidente, grafos distintos podem originar matroides cíclicos isomorfos.

Exemplo 3.1 *Consideremos os seguintes dois grafos, G_1 e G_2.*



Como facilmente se vê, G_1 e G_2 são grafos distintos. No entanto, os matroides cíclicos $M(G_1)$ e $M(G_2)$ são isomorfos. A matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma $\mathbb{R}$-representação dos dois matroides.

□

Porque os matroides M_1 (do exemplo 1.1) e M_2 (do exemplo 1.3, construído com as arestas do grafo G) são isomorfos e este último é um matroide cíclico, podemos dizer que o matroide vetorial $M_1 = M[A]$ é gráfico e que o grafo G é uma sua representação gráfica.

Não fique o leitor a pensar que todos os matroides vetoriais são matroides gráficos porque isto não é verdade.

Exemplo 3.2 *Seja B a seguinte matriz, com duas linhas, quatro colunas e preenchida por números reais:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se o matroide vetorial $M[B]$ fosse gráfico, existiria um grafo com quatro arestas em que quaisquer três dessas arestas formariam um ciclo do grafo. Mais, quaisquer duas arestas não formariam um ciclo do grafo (atenda aos conjuntos linearmente independentes que se consegue formar com as colunas da matriz B). Sejam u_1, u_2, u_3, u_4 as quatro arestas do grafo. Então u_1, u_2, u_3 e u_1, u_2, u_4 eram dois ciclos do grafo. Mas isto implicaria que as extremidades das arestas u_3 e u_4 eram as mesmas. Assim sendo, u_3, u_4 seria um ciclo, o que é impossível. Portanto, $M[B]$ não é gráfico.

□

A teoria dos matroides desenvolveu-se imenso com a relação que se estabeleceu entre grafos e matroides construídos com o conjunto das arestas dos grafos. De tal maneira foi este desenvolvimento, que muitos dos resultados que foram inicialmente expostos para grafos conseguiram generalizar-se para matroides. Um destes exemplos é o algoritmo de Kruskal (ver [5, 9]). Com o passar dos anos, mais se confirma o que Tutte escreveu em [6] *If a theorem about graphs can be expressed in terms of edges and circuits only it probably exemplifies a more general theorem about matroids.*

4. OUTROS MATROIDES

A teoria dos matroides não ficou cingida aos matroides vetoriais e aos matroides cíclicos, matroides estes que lhe deram origem. Nos últimos anos, têm surgido muitos outros tipos de matroides, confirmando que Whitney ao tentar unificar um conceito em duas teorias distintas (álgebra linear e teoria dos grafos) criou uma nova teoria que veio resolver problemas em imensas áreas científicas. Nesta secção veremos um exemplo prático, muito simples, de um matroide que é $\mathbb{R}$-representável mas que não tem representação gráfica.

Definição 4.1. MATROIDE UNIFORME: *Sejam n e r dois números inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Chama-se matroide uniforme, denotando-se por $U_{r,n}$, a um matroide $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto com n elementos e $\mathcal{I}$ é a coleção de subconjuntos de E com, no máximo, r elementos.*

□

É um bom exercício para o leitor comprovar que o par $(E, \mathcal{I})$ da definição anterior constitui um matroide, ou seja, que verifica as propriedades $I_1) - I_3)$ da secção 1.

Vejamos um exemplo prático no qual estamos perante um destes matroides.

Exemplo 4.2 *O Rui tem uma lista de compras para o supermercado:*

- *1 dúzia de ovos;*
- *1 kg de arroz;*
- *1 lata de atum;*
- *1 pacote de salada.*

No supermercado, repara que se esqueceu da carteira em casa e que nos seus bolsos só tem três euros. Olha para as prateleiras e acrescenta à sua lista de produtos os respectivos preços:

- *1 dúzia de ovos = 1,00 euro;*
- *1 kilo de arroz = 1,10 euros;*
- *1 lata de atum = 1,30 euros;*
- *1 pacote de salada = 1,20 euros.*

Face ao exposto, o Rui tem, no máximo, dinheiro para comprar quaisquer dois produtos da sua lista. Ou não compra nada, ou compra um produto, ou compra dois produtos.

Estamos perante um problema que tem quatro elementos (os produtos da lista do Rui) e podemos construir subconjuntos destes quatro elementos com, no máximo, dois elementos (o Rui só tem dinheiro para comprar, no máximo, dois produtos da lista). Portanto o que temos neste exemplo é o matroide uniforme $U_{2,4}$.

Se o problema que o Rui pretende resolver é conhecer que produtos deve comprar para gastar o menos possível, então podemos usar a generalização do algoritmo de Kruskal para matroides.

□

Repare que o matroide $U_{2,4}$ não é gráfico, pois a matriz B do exemplo 3.2 é uma sua $\mathbb{R}$-representação.

Para aprofundar este tema, poderá recorrer à bibliografia em português [5].

REFERÊNCIAS

[1] Crapo, H.H. e Rota, G.-C., *On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries*, Preliminary edition, MIT Press, Cambridge, 1970.

[2] Oxley, J.G., *Matroid Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[3] Oxley, J.G., "What is a matroid?" Cubo 5 (2003) 179-218. (*https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf*)

[4] Reiner, V., "Lectures on matroids and oriented matroids", Vienna 2005, (*http://www.math.umn.edu/~reiner/Talks/Vienna05/Lectures.pdf*)

[5] Simões Pereira, J.M.S., *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*, Editora Luz da Vida, Coimbra, 2009.

[6] Tutte, W.T., *Selected papers of W.T. Tutte*, vol. II (eds. D. McCarthy and R.G. Stanton), Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, 1979.

[7] Welsh, D.J., *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.

[8] Whitney, H., "On the abstract proprieties of linear dependence", *Amer. J. Math*. 57 (1935) 509-533.

[9] Wilson, R.J. e Watkins, J.J., *Graphs an Introductory Approach*, Wiley, 1990.

SOBRE A AUTORA

Rosário Fernandes licenciou-se em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em 1987. Desde 1999 é professora auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É autora de diversos artigos científicos sobre álgebra multilinear e combinatória.