Jogo de tabuleiro Blokus (*http://en.wikipedia.org/wiki/Blokus*)

UMA EXPLORAÇÃO COM PENTAMINÓS

Óscar Felgueiras
Universidade do Porto
olfelgue@fc.up.pt

Um pentaminó é um conjunto de cinco quadrados unitários unidos por arestas em comum. A menos de isomorfismo, envolvendo rotações e reflexões, existem 12 peças diferentes.

Um pentaminó é um conjunto de cinco quadrados unitários unidos por arestas em comum. A menos de isomorfismo, envolvendo rotações e reflexões, existem 12 peças diferentes. Habitualmente são designadas por letras alfabéticas com as quais se assemelham, de acordo com a figura 1 abaixo.

O primeiro problema conhecido com pentaminós foi publicado em 1907 pelo inventor de puzzles inglês Henry Ernest Dudeney no seu primeiro livro, *The Canterbury Puzzles* [2]. No entanto, foi o americano Solomon Golomb que os batizou de "pentominoes", numa palestra em 1953 no Harvard Mathematics Club, e lhes deu maior visibilidade (ver [3]).

Neste artigo pretende-se explorar um puzzle que envolve pentaminós, criado a partir de uma ideia de Werner Metzner, chamado "Calendário de Pentaminós" (CP) ou "Pentomino-Kalender" no original. O CP surge descrito no livro *Wie man durch eine Postkarte steigt* [1] e faz parte de uma seleção de experiências matemáticas. Foi tornado objeto de exposição e também comercializado pelo museu Mathematikum, em Gissen, na Alemanha. O CP é um quebra-cabeças composto por sete dos 12 pentaminós existentes, nomeadamente, as peças L, N, P, U, V, Y, Z; e um tabuleiro com 31 casas. A forma do

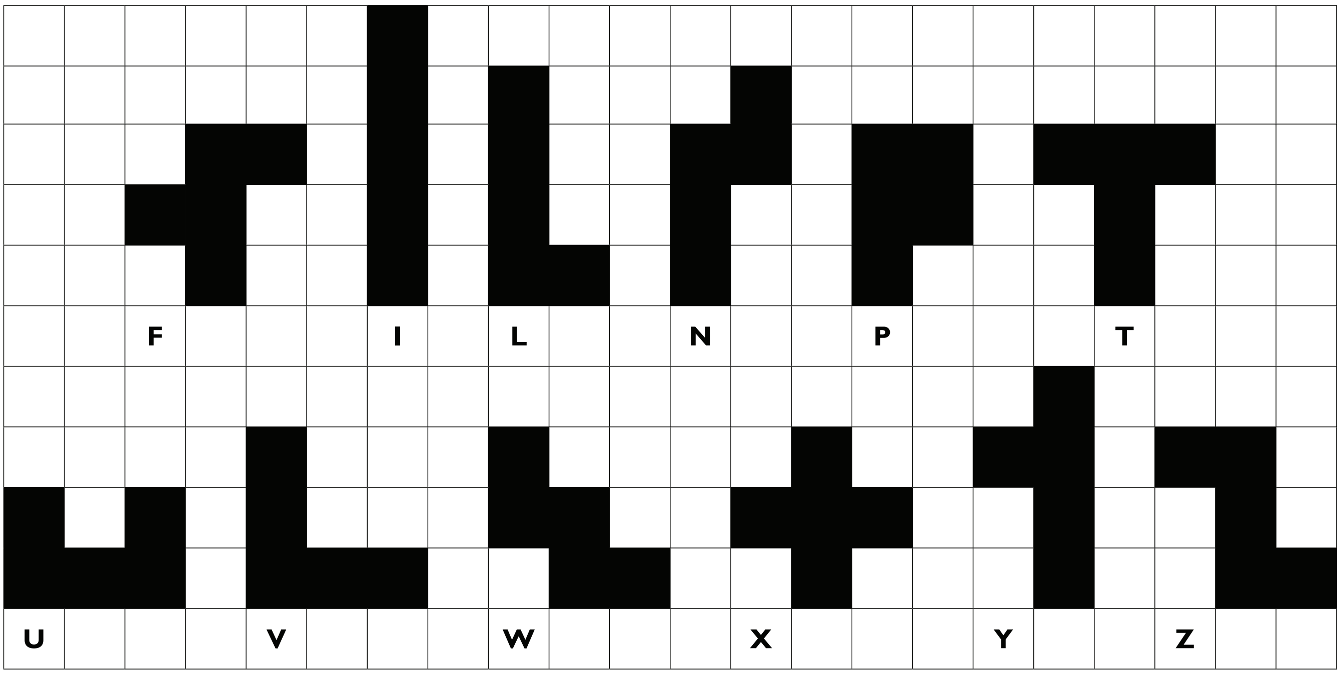

Figura 1: Os 12 pentaminós.

tabuleiro assemelha-se a um calendário e é a descrita na figura 2 abaixo.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Figura 2: O tabuleiro do CP.

Fixado um dos 31 dias, o objetivo é cobrir os restantes com seis das sete peças. No fundo, é como se este puzzle contivesse 31 puzzles diferentes num só. Veja-se a seguir um exemplo de como resolver o dia 20; ou seja, fixando o dia 20, apresenta-se uma solução em que este é o dia não coberto pelas peças (figura 3). Além desta solução, existem mais 50 para este dia, conforme será observado adiante. Também se constata que todos os dias do CP têm solução.

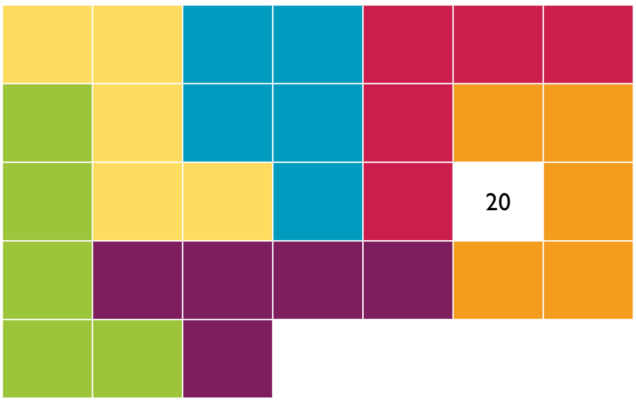

Figura 3: Uma solução para o dia 20.

O facto de o CP ser constituído por estas sete peças e não outras parece algo intrigante. Afinal, se existem 12 pentaminós diferentes, este conjunto é apenas um entre 792. E porquê sete peças e não seis? Cada solução necessita apenas de seis peças. Logo, não é clara à partida a necessidade de uma sétima peça. É inevitável o recurso a um computador para se obter estas respostas em tempo útil.

O artigo de Donald Knuth [4] exibe um algoritmo para encontrar soluções de problemas de coberturas exatas, nos quais se enquadram o CP ou o Sudoku. Este artigo começa por descrever um procedimento relativamente simples designado por algoritmo X que, na prática, consiste em seguir uma estratégia de tentativa e erro. Em seguida, apresenta um algoritmo designado por DLX (Dancing Links X), bem mais sofisticado, que é extremamente eficaz quando usado numa linguagem de programação adequada (Java, por exemplo).

Dado que as questões a que se pretende responder são essencialmente de índole estatística, foi utilizada a linguagem R, que é hoje bastante popular nesta área. Foi criada uma base de dados com todas as soluções do calendário, utilizando os 12 diferentes pentaminós. Obteve-se um total de 17.703 soluções formadas por peças distintas. Estas soluções são determinadas em menos de dois segundos por um applet da autoria de Jaap Scherphuis, em *http://www.jaapsch.net/puzzles/java/polyapplet/polyapp.htm*, o qual implementa o algoritmo DLX. Para tal, basta clicar em "File", "Download" e selecionar o ficheiro "Pentomino_Kalender" criado para o efeito.

Ao analisar a base de dados, começamos pela contagem da ocorrência de cada pentaminó nas 17.703 soluções. Isto porque se obtém daí uma ordenação das peças, que dá uma ideia comparativa daquelas que poderão ser as mais úteis, e que será usada como referência neste artigo para exibir qualquer conjunto de peças. A tabela 1 apresenta a ordenação obtida juntamente com a referida contagem. Além disso, é indicado, para termo de comparação, o número de colocações possíveis de cada peça no tabuleiro juntamente com o respetivo número de orientações.

Consultando esta tabela, observa-se que as sete peças do CP consistem das seis que mais ocorrem em soluções (PLYVUN) e da peça Z. Provavelmente, não admira muito que a peça P seja a que ocorre em mais soluções, dado que é aquela que pode ser colocada de mais formas sobre o tabuleiro. Assim como a peça X é a menos frequente, dado ser a que tem menos formas de ser colocada, o que advém de ser a única com apenas uma orientação possível. Note-se, no entanto, que se determinada peça tem mais formas de ser colocada no tabuleiro do que outra, ela não vai necessariamente ocorrer em mais soluções, embora a correlação entre as soluções e as colocações seja 0.77; isto é, há uma associação positiva clara entre o número de colocações de uma peça e o número de soluções em que essa peça aparece.

Pentaminó	Soluções	Colocações	Orientações
P	14.919	122	8
L	13.020	84	8
Y	11.375	85	8
V	11.345	46	4
U	10.403	60	4
N	10.147	85	8
F	8538	95	8
I	7705	15	2
T	6490	47	4
Z	5757	47	4
W	5005	47	4
X	1514	12	1

Tabela 1: Número de soluções, colocações e orientações de cada pentaminó.

Conjunto de sete peças com mais soluções	Soluções
PLYVUNF	1643
PLYVUNI	1208
PLYVUNT	1173
PLYVUNZ (CP)	1149
PLYUNFI	1052
Conjuntos de sete peças com menos soluções	**Soluções**
PYVUTZW	103
PVUFIZW	124
LYVUNZW	127
PYVUFZX	169
PLVFTZW	173

Tabela 3: Os conjuntos de sete pentaminós com mais e menos soluções.

De forma a estabelecer uma melhor compreensão das soluções associadas a cada conjunto de pentaminós distintos, começamos por observar os conjuntos de seis peças. Existem apenas sete conjuntos que resolvem todos os 31 dias do calendário, apresentados na tabela 2 juntamente com a contagem total de soluções.

Destaca-se a presença das peças P, L e Y em todos estes conjuntos e a ausência das peças Z, W e X. Como o CP é constituído pelas peças PLYVUNZ, daqui decorre também que a peça Z é dispensável devido a PLYVUN resolver todos os dias. Na verdade, é também a única dispensável do CP, dado que este não tem qualquer subconjunto de seis peças contendo Z que resolva todo o calendário.

Quanto aos conjuntos de sete pentaminós distintos, existem 125 que resolvem os 31 dias com número de soluções que variam entre 103 e 1643. Apresenta-se na tabela 3, dentro destes conjuntos, os cinco com mais e menos soluções.

Note-se que o conjunto do CP é o quarto com mais soluções e que o número máximo de soluções (1643) é atingido precisamente tomando as sete peças de maior frequência em soluções. É também de realçar que o conjunto PYVUTZW não só origina o número mínimo de soluções entre estes conjuntos (103), como é, de facto, aquele que resolve todos os dias com número mínimo de soluções ao tomar-se qualquer conjunto de peças distintas que resolvam todos os dias. Um dado curioso é a existência de 26 conjuntos de sete pentaminós com os quais não se consegue resolver nenhum dos 31 dias.

Ainda mais curioso é que ao se analisar os conjuntos de oito pentaminós distintos encontra-se um único que não resolve nenhum dia! É o caso do conjunto LNFIT-

Conjuntos	PLYVUN	PLYUNF	PLYUNI	PLYVNF	PLYUNT	PLYVUT	PLYVFT
Soluções	392	283	197	181	169	131	130

Tabela 2: Sete conjuntos de seis pentaminós e respetivos números de soluções.

ZWX. Repare-se que estão aqui presentes as sete peças de menor frequência em soluções juntamente com a peça L, a qual, apesar de ser a segunda de maior frequência, não combina bem com as restantes. Refira-se que qualquer conjunto com nove pentaminós distintos resolve sempre algum dia e que com 10 todos os dias são resolvidos.

Voltando aos conjuntos de sete peças, existe um parâmetro em que o CP se destaca mais do que na simples contagem de soluções, que é o número mínimo de soluções por dia. O CP tem um valor mínimo de soluções para os dias 22 e 24 nos quais existem 20 soluções. Na verdade, dentro dos conjuntos de sete peças este é o que tem o segundo maior mínimo, só ultrapassado pelo PLYVUNF, que tem um mínimo de 32. Na figura 4 apresenta-se o número de soluções do CP para cada um dos 31 dias.

Dada a singularidade da peça Z no CP, exibe-se também na figura 5 o número de soluções que a excluem, para cada dia.

Comparando estas duas figuras, verifica-se a não coincidência do número de soluções em nenhum dos dias, o que significa em particular que em todos eles existe sempre alguma solução envolvendo o Z.

Concentrando a atenção nos cinco conjuntos com mais soluções referidos na tabela 3 e analisando as suas distribuições de soluções por dia, obtêm-se os seguintes diagramas de extremos e quartis representados na figura 6.

Repare-se que dentro dos cinco conjuntos com maior número de soluções, o CP é o que tem uma distribuição de peças mais homogénea, no sentido em que tem a menor amplitude de variação do número de soluções para cada um dos 31 dias. Isto torna, digamos assim, o CP aquele que tem um grau de dificuldade mais uniforme para os 31 dias do calendário dentro destes cinco conjuntos.

Tendo tudo isto em conta, podemos sintetizar conclusões relativas à seleção das peças pertencentes ao CP. É o segundo conjunto de sete peças com maior número mí-

70	30	24	23	35	36	37
29	52	29	37	42	59	28
24	24	32	29	40	51	32
20	66	20	23	35	38	44
49	52	39				

Figura 4: Número de soluções do CP em cada dia.

25	11	8	5	13	19	16
8	12	9	18	11	17	16
9	9	3	18	13	16	16
7	21	3	7	14	18	17
6	17	10				

Figura 5: Número de soluções do CP sem a peça Z em cada dia.

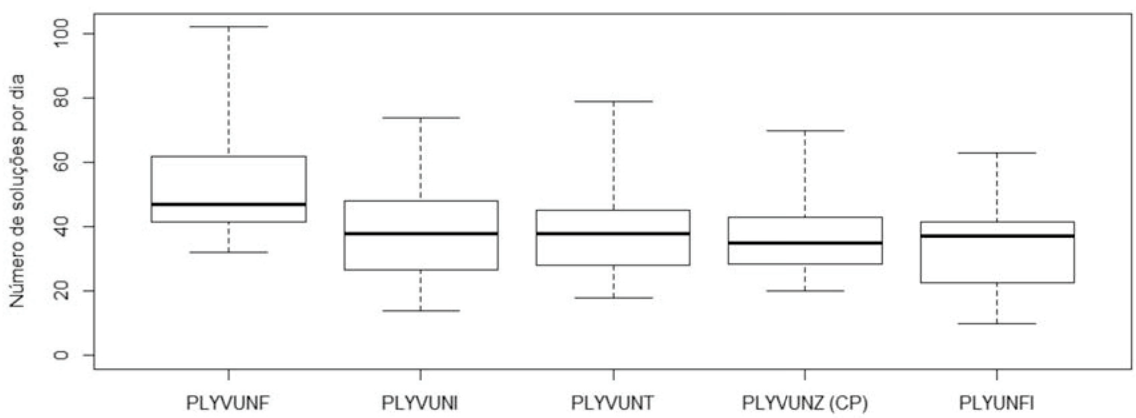

Figura 6: Diagramas de extremos e quartis das distribuições de soluções por dia de cinco conjuntos.

nimo de soluções por dia e o quarto com maior número total de soluções. Além disso, é um conjunto que assegura um bom compromisso entre maior quantidade e uniformidade de soluções por dia, fazendo do CP um puzzle simultaneamente acessível e equilibrado. O CP é constituído pelas seis peças de maior frequência em soluções e pela peça Z, que é a terceira que menos ocorre. O CP pode ser resolvido para todos os dias com ou sem a peça Z, o que constitui uma faceta oculta que lhe acrescenta versatilidade. Fica o desafio para o leitor de fixar, por exemplo, o seu dia de aniversário ou o dia de hoje, e encontrar uma solução utilizando algum dos conjuntos de seis ou sete pentaminós referidos neste texto.

REFERÊNCIAS

[1] A. Beutelspacher e M. Wagner, *Wie man durch eine Postkarte steigt*, Verlag Herder GmbH, Freiburg (Breisgau), 2008.

[2] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems*, W. Heinemann, London, 1907.

[3] S. W. Golomb, "Checker Boards and Polyominoes", *American Mathematical Monthly*, Vol. 61, n.º 10, 675-682, 1954.

[4] D. E. Knuth., "Dancing Links", *Millennial Perspectives in Computer Science*, 187-214, 2000. Disponível em *http://arxiv.org/pdf/cs/0011047.pdf*

SOBRE O AUTOR

Óscar Felgueiras é doutorado pela University of Michigan – Ann Arbor, EUA, com uma tese em Geometria Algébrica, e é professor no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Desenvolve atualmente investigação no Centro de Matemática da Universidade do Porto, na área de estatística e modelação matemática.