

Uma intersecção surpreendente

João Queiró

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

Rosa Amélia Martins

Campus Universitário de Santiago
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
rosa@mat.ua.pt

Resumo: Nesta nota observa-se que certo corpo convexo, a meio caminho entre uma esfera e um cubo, tem uma secção plana circular.

Em \mathbb{R}^3 a bola unitária para a norma euclidiana é a esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 1. Para a norma “infinito” é o cubo de aresta 2 com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Para a norma “um” é o octaedro cujos vértices são os pontos médios das faces do cubo anterior.

Relembremos que normas são estas:

– a norma euclidiana (associada ao produto interno usual) é a função $\|\cdot\|_2$, que a cada vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 faz corresponder o número real (não negativo) dado pela expressão $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. A bola unitária associada ($\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 1\}$) é portanto a tal esfera de raio 1. Representemo-la por B_2 .

– a norma “infinito” é a função $\|\cdot\|_\infty$, que a cada vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 faz corresponder $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$. A bola unitária associada é o referido cubo de aresta 2. Representemo-la por B_∞ .

– a norma “um” é a função $\|\cdot\|_1$, que a cada $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 faz corresponder $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. A bola unitária correspondente é o octaedro já mencionado. Representemo-la por B_1 .

É geometricamente evidente que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$.

Seja agora p um número real não inferior a 1. Consideremos a norma p de

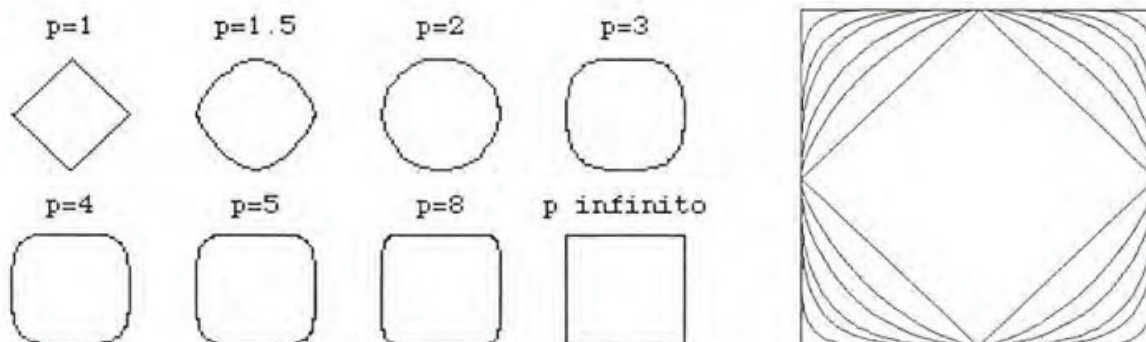
Hölder associada, isto é, a função $\|\cdot\|_p$ que a cada x de \mathbb{R}^3 faz corresponder $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{\frac{1}{p}}$. A bola unitária associada, B_p , fica “encaixada” entre o octaedro B_1 e a esfera B_2 se $1 \leq p \leq 2$, e entre a esfera B_2 e o cubo B_∞ se $p \geq 2$.

De um modo geral, se $p < p'$ tem-se, pela conhecida desigualdade de Jensen, $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$, donde $B_p \subseteq B_{p'}$. Como existe x_0 tal que $\|x_0\|_p > \|x_0\|_{p'}$ (por exemplo $x_0 = (1, 1, 1)$) tem-se a inclusão estrita $B_p \subset B_{p'}$.

Para qualquer $p > 1$ a bola B_p é diferenciável, isto é, em cada ponto da fronteira passa um e um só plano tangente à bola nesse ponto. Só não são diferenciáveis B_1 e B_∞ .

A intersecção de B_1 ou B_∞ com um plano que passe pela origem é uma figura poligonal. Para $1 < p < \infty$ a intersecção de B_p com qualquer plano que passe pela origem é uma região convexa plana limitada por uma linha fechada e diferenciável (por cada ponto da linha passa uma e uma só recta do plano, tangente à linha nesse ponto). No caso $p = 2$ essa intersecção é obviamente um círculo de raio 1.

A figura seguinte representa a intersecção de B_p com qualquer um dos planos coordenados, para $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 5, 8, \infty$.



Para algum $p \neq 2$ poderá acontecer que a intersecção de B_p com um plano que passe pela origem seja um círculo? Por estranho que pareça, pode. É o que acontece com $p = 4$ e o plano Π de equação $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, por exemplo. (Atendendo às simetrias da bola servem também os planos de equação $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ou $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.)

Esse surpreendente resultado é o objectivo da presente nota.

Teorema: *A intersecção de Π com B_4 é um círculo de raio $\sqrt[3]{2}$.*

Demonstração:

Para cada p , representemos por $\partial(B_p)$ a fronteira da bola B_p . O que pretendemos demonstrar é que $\partial(B_4) \cap \Pi$ é uma circunferência de raio $\sqrt[3]{2}$, isto é, que para qualquer $y \in \partial(B_4) \cap \Pi$ se tem $\|y\|_2 = \sqrt[3]{2}$.

Associe-se a cada ponto x de $\partial(B_1)$ a semirecta Ox que passa por x e tem origem em $O = (0, 0, 0)$. Cada semirecta Ox intersecta $\partial(B_4)$ num ponto x' univocamente determinado por x . Seja P a aplicação que transforma x em x' .

Por construção P é uma bijecção de $\partial(B_1)$ em $\partial(B_4)$ e transforma cada vector num vector que lhe é colinear. Então podemos escrever a igualdade

$$\Pi \cap \partial(B_4) = P(\Pi \cap \partial(B_1)).$$

Iremos representar os seis vértices do octaedro B_1 por

$$V_1 = (1, 0, 0),$$

$$V_2 = (0, 1, 0),$$

$$V_3 = (0, 0, 1),$$

$$V_4 = -V_1,$$

$$V_5 = -V_2,$$

$$V_6 = -V_3,$$

e as oito faces por

F_1 , a face definida por V_1, V_2 e V_3 ;

F_2 , por V_4, V_2 e V_3 ;

F_3 , por V_4, V_5 e V_3 ;

F_4 , por V_1, V_5 e V_3 ;

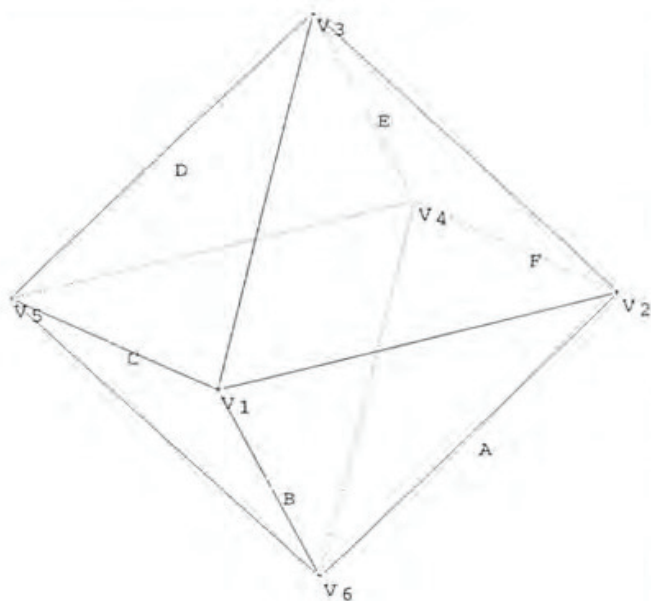
F_5 , por V_1, V_2 e V_6 ;

F_6 , por V_4, V_2 e V_6 ;

F_7 , por V_4, V_5 e V_6 ;

F_8 , por V_1, V_5 e V_6 .

A figura seguinte representa $\Pi \cap B_1$.



A fronteira de B_1 é a reunião dos oito triângulos F_1, \dots, F_8 . Então

$$\Pi \cap \partial(B_1) = \Pi \cap (\cup_{i=1}^8 F_i) = \cup_{i=1}^8 (\Pi \cap F_i).$$

Mas o plano Π não intersecta F_1 e F_7 porque as coordenadas de um ponto de Π não podem ter todas o mesmo sinal.

Consideremos então, por exemplo, um ponto genérico de $\Pi \cap F_5$. Qualquer ponto x de F_5 é combinação linear convexa de V_1, V_2 e V_6 , isto é, é da forma

$$x = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, -1)$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Por outro lado, por ser $x \in \Pi$, é $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Então é $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}$ e podemos escrever

$$x = (\alpha_1, \frac{1}{2} - \alpha_1, -\frac{1}{2}) \text{ com } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$$

ou, fazendo $a = 2\alpha_1$,

$$x = \frac{1}{2}(a, 1 - a, -1) \text{ com } 0 \leq a \leq 1.$$

(Note-se que é $\|x\|_1 = 1$, como seria de esperar.)

Para $a = 0$ obtém-se o ponto A, para $a = 1$ obtém-se o ponto B (ver a figura).

Repetindo o raciocínio para obter as coordenadas de um ponto genérico de cada um dos outros lados do hexágono vem, com $0 \leq a \leq 1$:

- para $\Pi \cap F_8$ é $x = \frac{1}{2}(1, -a, -1 + a)$ obtendo-se B para $a = 0$ e C para $a = 1$.

- para $\Pi \cap F_4$ é $x = \frac{1}{2}(1 - a, -1, a)$ obtendo-se C para $a = 0$ e D para $a = 1$.

- para $\Pi \cap F_3$ é $x = \frac{1}{2}(-a, -1 + a, 1)$ obtendo-se D para $a = 0$ e E para $a = 1$.

- para $\Pi \cap F_2$ é $x = \frac{1}{2}(-1, a, 1 - a)$ obtendo-se E para $a = 0$ e F para $a = 1$.

Finalmente para $\Pi \cap F_6$ é $x = \frac{1}{2}(-1 + a, 1, -a)$ obtendo-se F para $a = 0$ e A para $a = 1$.

Repare-se que as coordenadas dos pontos de cada lado do hexágono $[ABCDEF]$ se podem obter a partir das coordenadas dos pontos do lado $[AB]$, por exemplo, por mudança de sinal das coordenadas ou por alguma permutação delas. Por outro lado, este tipo de transformações (mudanças de sinal e permutações de coordenadas), não altera qualquer norma de Hölder de um vector. Sendo assim, basta-nos calcular $\|P(x)\|_2$ para $x \in \Pi \cap F_5$, por exemplo.

$P(x)$ é a projecção de x sobre $\partial(B_4)$, como foi já referido. Temos portanto

$$P(x) = \frac{\lambda}{2}(a, 1 - a, -1)$$

com $\lambda \geq 0$ e $\frac{\lambda}{2}[a^4 + (1 - a)^4 + 1]^{\frac{1}{4}} = 1$, ou seja, $\lambda = 2[a^4 + (1 - a)^4 + 1]^{-\frac{1}{4}}$.

Substituindo vem

$$P(x) = [a^4 + (1 - a)^4 + 1]^{-\frac{1}{4}}(a, 1 - a, -1)$$

com $0 \leq a \leq 1$. Calculemos a norma euclidiana deste vector:

$$\begin{aligned} \|P(x)\|_2 &= [a^4 + (1 - a)^4 + 1]^{-\frac{1}{4}} [a^2 + (1 - a)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\|P(x)\|_2)^4 = \frac{[a^2 + (1-a)^2 + 1]^2}{a^4 + (1-a)^4 + 1}.$$

Mas

$$\begin{aligned} & [a^2 + (1-a)^2 + 1]^2 \\ &= (a^2 + 1 - 2a + a^2 + 1)^2 = 4(a^2 - a + 1)^2 \\ &= 4(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1) \end{aligned}$$

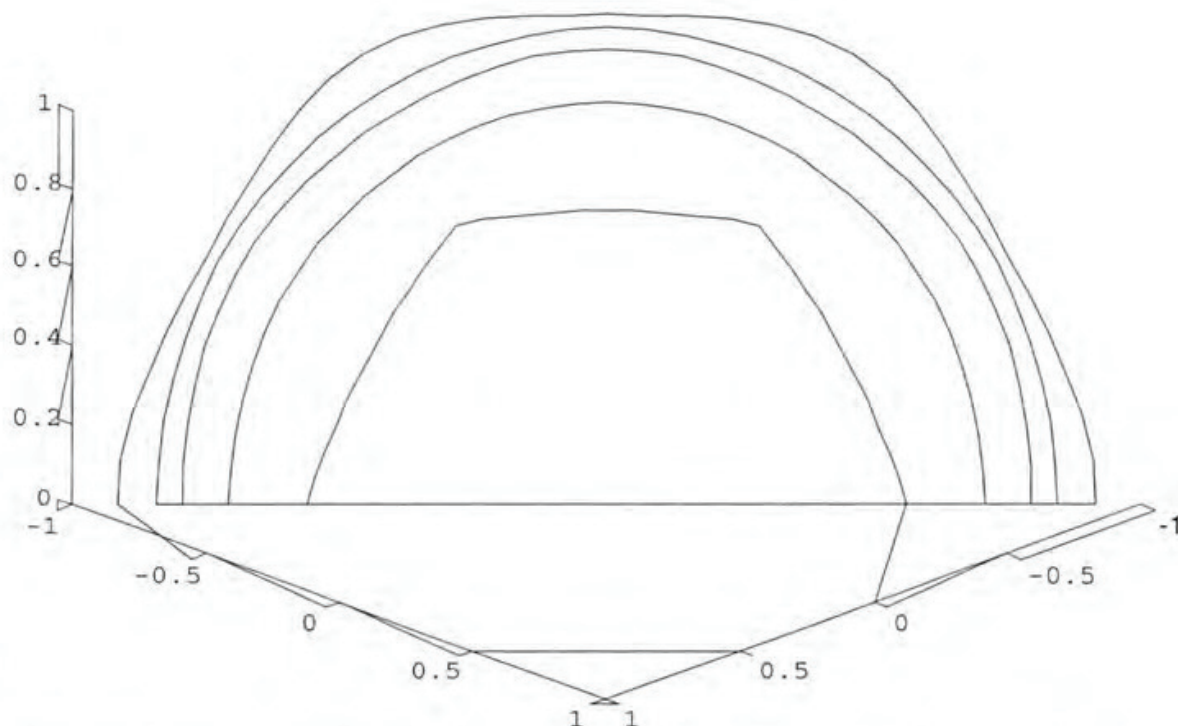
e

$$\begin{aligned} & a^4 + (1-a)^4 + 1 \\ &= a^4 + (1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4) + 1 \\ &= 2(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1). \end{aligned}$$

Então vem $(\|P(x)\|_2)^4 = 2$, ou seja, $\|P(x)\|_2 = \sqrt[4]{2}$, como se queria provar. ■

Observação. A intersecção deste plano Π com B_p é interessante para qualquer valor de p . Para $p = 1$ e $p = \infty$

essa intersecção é um hexágono². No primeiro caso, o hexágono, chamemo-lo h_1 , está contido em $c = \Pi \cap \partial(B_2)$. No segundo caso, h_∞ , contém c . Os vértices de cada um destes dois hexágonos estão nas semirectas definidas pela origem e pelos vértices do outro. Para $1 < p < 2$ a intersecção de Π com B_p é um "hexágono arredondado" que, no limite, é o hexágono h_1 ($p = 1$) ou o círculo c ($p = 2$). Para $p > 4$ essa intersecção volta a ser do tipo "hexágono arredondado" que, no limite, é um círculo ($p = 4$) ou o hexágono h_∞ ($p = \infty$). Tanto num caso como noutro os pontos da fronteira de $\Pi \cap B_p$ que se encontram *mais afastados* da origem, ou seja, aqueles que correspondem aos vértices, pertencem às semirectas que unem a origem aos vértices de h_1 ou h_∞ . Para $2 < p < 4$ a fronteira da intersecção $\Pi \cap B_p$ é uma linha em que os pontos *mais próximos* da origem se encontram nas semirectas já referidas. A figura seguinte mostra metade de $\Pi \cap B_p$ para $p = \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 8$.



²Estamos a designar por "hexágono" a região do plano e não apenas a sua fronteira.