Pentágono inscrito numa circunferência

A. J. M. Antunes

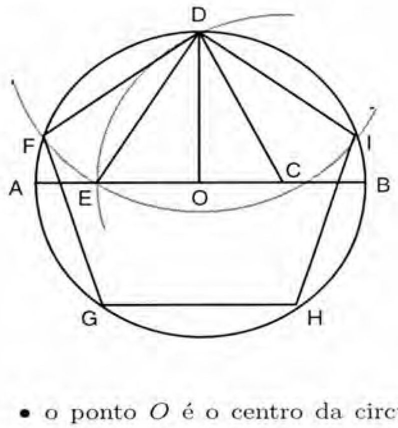
Escola Secundária de José Estevão
ajantunes@lusoweb.pt

Com este trabalho pretende-se fazer uma breve nota da História da Matemática e resolver um "velho" problema com ferramentas actuais.

Todos os conceitos envolvidos devem ser do conhecimento dos alunos do 12° ano, pelo que as justificações e cálculos pedidos constituem uma proposta de exercício, permitindo que o aluno siga uma pequena demonstração desenvolvendo a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.

Cláudio Ptolomeu (séc. II d.C.) deu-nos uma elegante construção do pentágono regular inscrito numa circunferência, na qual afirma que os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na mesma circunferência, são os comprimentos dos lados de um certo triângulo rectângulo.

A construção é a seguinte:



- o ponto O é o centro da circunferência considerada e $[AB]$ um seu diâmetro;
- C é o ponto médio de $[OB]$;
- o ponto D obtém-se traçando OD perpendicularmente a AB;
- o ponto E pertence a $[OA]$ e verifica $\overline{CE} = \overline{CD}$.
- o ponto F está sobre a circunferência e $\overline{DF} = \overline{DE}$.

Os comprimentos dos lados do triângulo rectângulo $[DEO]$, $\overline{DE}$, $\overline{DO}$ e $\overline{EO}$, são, respectivamente, os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na circunferência.

1. Demonstraremos que $\overline{DF}$ é o comprimento do lado do pentágono, provando que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos (numa circunferência, a ângulos ao centro iguais correspondem cordas iguais).

1.1. Prova de que

$$\cos\left(D\hat{O}F\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $r = 1$.
Tem-se sucessivamente:

$$\overline{DO} = 1$$

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(porquê?)}$$

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \qquad \text{(porquê?)}$$

Das propriedades do produto escalar de vectores deduz-se:

$$\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2$$
$$-2 \times \left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OD}\right\| \times \cos\left(D\hat{O}F\right)$$

(deduza) e, da condição anterior, pode concluir-se:

$$\cos\left(D\hat{O}F\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{(deduza)}$$

1.2. Prova de que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
Como

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

então

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 0$$

logo $\frac{\pi}{5}$ é uma raiz da equação $\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) = 0$. Das relações

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

e

$$cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

(deduza), conclui-se que as equações

$$cos(3\alpha) + cos(2\alpha) = 0 \qquad (0.1)$$

e

$$4cos^3(\alpha) + 2cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) - 1 = 0 \qquad (0.2)$$

são equivalentes. Como π é raiz da equação (0.1) e $\cos(\pi) = -1$, o polinómio $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ é divisível por $x + 1$ e pode concluir-se que são equivalentes as equações

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

e

$$(x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right) = 0 \quad (prove)$$

e que as suas raízes são

$$-1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad (prove).$$

Tem-se então

$$\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = -1 \vee \cos(\alpha) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \vee \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

logo *cos* $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ é um daqueles três valores.

Como $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *(porquê?)* concluindo-se ser

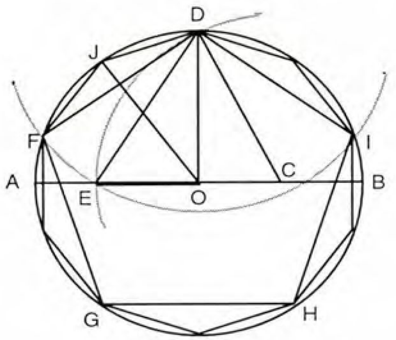
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Tem-se então

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad (deduza).$$

Podemos agora concluir que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos, pelo que $\overline{DE}$ é o comprimento do lado do pentágono regular inscrito na circunferência.

2. Facilmente provará *(prove)* que $\overline{OE}$ é o comprimento do lado do decágono regular inscrito na circunferência. Bastará, para tal, considerar um ponto J da circunferência tal que $\overline{DJ} = \overline{JF}$.



Como é do conhecimento geral que o comprimento do lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência, fica demonstrada a relação entre os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na mesma circunferência.