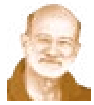
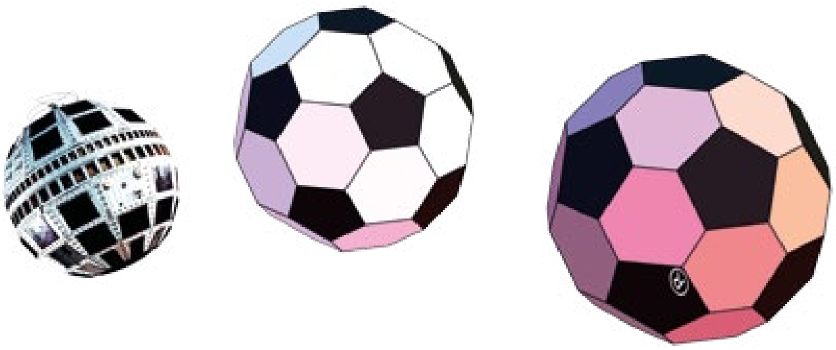


Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

AS BOLAS DA FIFA NÃO SÃO GRANDE COISA

Trunquem um pouco mais fundo o icosaedro truncado e farão da Telstar uma bola melhor.



Negócio de bolas é assunto sério. Há laboratórios sofisticados inovando para melhor vender, e adivinham-se empresas de *marketing* com a missão de conceber ideias e ficções que a FIFA certifica. São exemplos a publicidade hiperbólica quadrienal e a caução 'científica' de inovações mal experimentadas. O caso da Jabulani, a bola do Mundial 2010, deu que falar; aos elogios dos vendedores – a mais perfeita de sempre, de aerodinâmica superlativa, nunca vista, etc. – opuseram-se os protestos de arqueiros, zagueiros e pontas-de-lança, que não a pouparam: horrorosa, dançarina, bola de supermercado. Houve mesmo quem lhe atirasse as culpas pelo fiasco do Mundial 2010: é que de entre todos os mundiais ele ocupa o penúltimo lugar na média de golos por jogo.

Mas o problema a tratar aqui é outro. Seria pouco razoável fabricar uma bola de futebol com quatro peças triangulares (de cabedal ou material sintético) cosidas de modo a formar um tetraedro. Depois de insuflado ar, a pressão arredondaria a bola de raiz tetraédrica, mas o jogo seria outro, mais imprevisível do que o râguebi. O princípio lógico é o de que quanto mais rotundo for o poliedro não inflado, mais rotunda e resistente será a bola depois de cheia.

A UEFA escolheu, nos anos 60 do século passado, o icosaedro truncado como modelo, com as faces pentagonais pintadas de negro, a que foi dado o *nom de guerre* Telstar, roubado a um então famoso satélite de telecomunicações. Anos depois, a Telstar venceu o concurso 'Miss Bola' para o Mundial do México-1970. Hoje, contas feitas, o arquimediano a preto e branco ou a cores por encomenda já leva mais de meio século de reinado.

Em 1981, J. M. Göthals e J. J. Seidel, num artigo justamente intitulado *The football*[1], mostraram que a bola podia ser melhorada. Os argumentos envolvem teoria dos invariantes, fórmulas de quadratura de Sobolev e órbitas do grupo icosaedral. A FIFA não se deixou convencer e, tanto quanto sabemos, a bola continuou a mesma.

O Canto Délfico espera ter mais sucesso junto das autoridades com uma abordagem bem mais modesta. Usando dois critérios elementares, distintos dos de 81, somos levados à mesma conclusão: a Telstar não está bem.

QUÃO *ROTUNDA* É UMA BOLA?

Expressões da linguagem quotidiana do género "este sólido é mais rotundo do que aquele" podem precisar-se por muitos métodos. Um dos mais simples começa por chamar *raio interno* de um sólido[2] ao maior dos raios das esferas nele contidas, e *raio externo* de um sólido ao menor dos raios das esferas que o contêm. Em seguida, define-se *esfericidade* do sólido como sendo a razão do raio interno pelo raio externo. Claro que

> *A esfericidade é um número positivo que não excede 1, sendo igual a 1 quando e só quando o sólido é uma esfera.*

Outro critério de avaliação da rotundidade baseia-se no chamado quociente isoperimétrico (QI) de um sólido S, que se define por

$$36\pi\,\frac{V^2}{A^3},$$

onde V é o volume de S e A a área da sua superfície envolvente. Este quociente satisfaz uma propriedade elementar importante: qualquer homotético de S tem o mesmo QI que S. O factor 36π destina-se exclusivamente a obter 1 como quociente isoperimétrico das esferas.

O teorema isoperimétrico tridimensional pode enunciar-se assim:

> *O quociente isoperimétrico dum sólido é um número positivo que não excede 1, sendo igual a 1 quando e só quando o sólido é uma esfera.*

Estamos perante um enunciado muito simples, com um lastro histórico notável e uma demonstração de elevado grau de dificuldade, em claro contraste com o gémeo trivial sobre a esfericidade.

Cada uma das funções, esfericidade e quociente isoperimétrico, permite comparar quaisquer sólidos quanto à sua rotundidade. Mas são critérios diferentes que podem, por isso, conduzir a conclusões díspares. Por exemplo, os cinco platónicos ficam assim ordenados, por ordem crescente dos seus quocientes isoperimétricos: tetraedro (.3023), cubo (.5236), octaedro (.6046), dodecaedro (.7547), icosaedro (.8288). Na corrida da esfericidade ganham o icosaedro e o dodecaedro, *ex-æquo* (.7947), o cubo e o octaedro ficam em terceiro lugar, *ex-æquo* (.5774), e o tetraedro em quinto (.3333), sozinho por não ter irmão dual.[3]

No caso dos poliedros arquimedianos, os dois critérios conduzem a ordenações algo diferentes; por exemplo, os quatro mais rotundos são os mesmos para os dois

Esfericidade à moda da FIFA

Na sua página digital das bolas, uma foto sugere o modo como avaliam a esfericidade: entalam a bola, sem a pressionar, entre duas placas planas paralelas e medem com grande rigor a distância entre os planos. Dizem repetir a medida para 45.000 posições da bola. O quociente do mínimo pelo máximo dessas distâncias é a esfericidade-*F*, da FIFA. Destaca o *site* que as bolas da classe FIFA PRO apresentam uma esfericidade-*F* de cerca de 98,5%.

Sugerimos que a bola oficial passe a ter a forma de castanha de revolução que a figura ilustra, com esfericidade-*F* inultrapassável.

Isoperimétrico O termo tem a sua raiz num problema bidimensional, famoso e muito antigo: *de entre as curvas planas simples fechadas com certo perímetro fixo, quais as que delimitam maior área?* O assunto foi desenvolvido na Grécia Antiga, datando desse período a intuição correcta de que as circunferências são a chave da questão. As referências remontam aos antigos pitagóricos, tendo sido, no entanto, o ateniense Zenodoro (séc. II a.C.) quem nos legou os resultados mais relevantes. Por testemunhos indirectos sabemos que ele provou teoremas isoperimétricos relativos a polígonos, como este: *de entre os polígonos fechados de perímetro fixo e um número fixo de vértices, os regulares são os que delimitam maior área.* Os *Elementos* de Euclides já continham a prova de que o quadrado tem a maior área de entre os rectângulos isoperimétricos.

Porém, só no terceiro quartel do séc. XIX, com K. Weierstrass à cabeça, surgiram as primeiras provas convincentes do famoso teorema isoperimétrico bidimensional.

[1] Vejam-se os artigos [1] - [3].

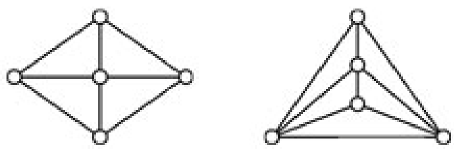
[2] Para tornar as coisas mais simples, *sólido* significa conjunto convexo, fechado, limitado e com, pelo menos, um ponto interior.

[3] Estes e outros números foram arredondados a quatro dígitos significativos.

Figura 1. Os quatro mais rotundos.

Zenodoro em 3D? *De entre os poliedros com n vértices (ou faces) quais são os que optimizam o QI, ou outro critério de rotundidade?* Cada valor de n origina problemas de dificuldade em geral elevada, nos quais, contrariamente ao caso 2D de Zenodoro, a regularidade não ajuda muito. Por exemplo, se n é ímpar, platónicos e arquimedianos ficam de fora, pois todos eles têm números pares de vértices e faces.

Para $n = 4$, o tetraedro regular é optimal, como o leitor interessado facilmente adivinha e comprova. Para cinco vértices, surge o problema de haver dois esqueletos (grafos de arestas) não isomorfos, os que a figura mostra, correspondentes à pirâmide quadrangular e à bipirâmide triangular.



Neste caso, os poliedros mais rotundos não são os mesmos para o QI e para a esfericidade, e não têm faces regulares. Saltando para o caso de oito vértices, o cubo tem menor QI e menor esfericidade do que o anti-prisma de base quadrada; mas a questão não fica resolvida só com isto, pois existem 257 esqueletos possíveis de poliedros com oito vértices; veja-se em [4] a sequência

1, 2, 7, 34, 257, 2606, 32.300,...

critérios mas por ordens distintas, como mostra a tabela seguinte, onde *esf.* e *QI* abreviam esfericidade e quociente isoperimétrico:

	esf.	*QI*
Rombicosidodecaedro	.9246	.9390
Dodecaedro roscado[4]	.9189	.9470
Icosaedro truncado	.9150	.9032
Grande rombicosidodecaedro	.9049	.9136

A figura 1 mostra os quatro vencedores, fortes candidatos a bolas da FIFA, pintados a preceito. Como sabemos, há mais de meio século a UEFA seleccionou o icosaedro truncado como modelo das bolas de futebol. A escolha parece acertada, dadas a pouca formosura do Grande Rombi e a complexidade estrutural dos dois mais rotundos – imaginem, por exemplo, o que seria coser à mão 12 pentágonos e 80 pequenos triângulos de cabedal num total de 150 costuras!

TRUNQUEM MAIS FUNDO!

Imaginemos que a FIFA, num momento de lucidez, encomendava à *Gazeta* o desenho duma bola de futebol à moda antiga. A ideia mais imediata consiste em tomar um dos cinco platónicos e truncar-lhe os vértices quanto baste. Por motivos estéticos, dinâmicos e funcionais, a truncatura deve consistir na remoção de pequenas pirâmides regulares, uma por cada vértice e de modo igual para todos os vértices. Admitindo que o nosso platónico tem arestas de medida 1, chamamos *profundidade* da truncatura à medida t das arestas laterais das pirâmides removidas. A figura 2 mostra o mais rotundo dos platónicos – e, por isso, o melhor candidato à truncatura – truncado a diversas profundidades.

A questão matemática cuja solução oferecemos à FIFA é esta: escolhido um critério de rotundidade e um sólido platónico,

> *Que profundidade(s) de truncatura desse platónico optimiza(m) a rotundidade?*

Mais precisamente, neste Canto Délfico resolvemos o caso do icosaedro truncado e convidamos o leitor a mandar à FIFA o tratamento dos outros quatro platónicos truncados.

O primeiro critério a considerar vai ser o de mais fácil tratamento, a esfericidade. Seja $\mathfrak{I}_t$ o icosaedro truncado

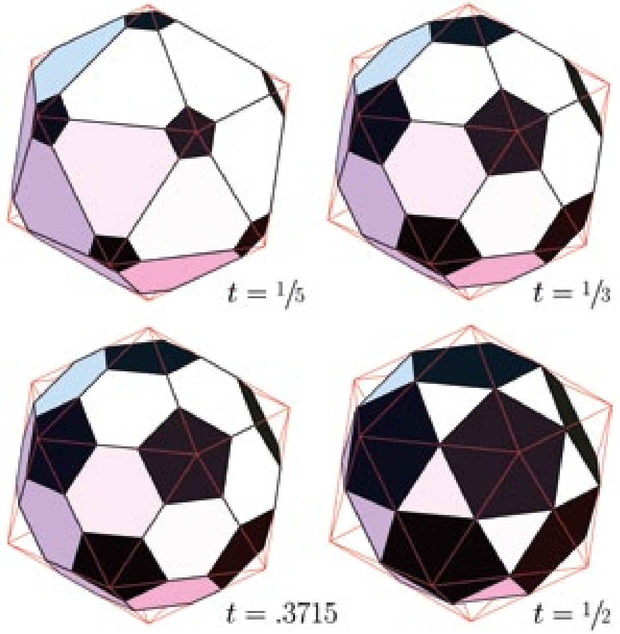


Figura 2. Truncaturas de um icosaedro.

à profundidade t; denotem-se por $r(t)$ e $R(t)$ os raios interno e externo de $\mathfrak{I}_t$. Por definição, a esfericidade de $\mathfrak{I}_t$ é

$$\epsilon(t) = \frac{r(t)}{R(t)}.$$

Note-se que t percorre o intervalo $[0, 1/2]$. Crescendo t, cada vértice de $\mathfrak{I}_t$ aproxima-se do centro de cada face triangular a que pertence, pelo que $R(t)$ é estritamente decrescente. O raio $r(t)$ é a menor das distâncias das faces hexagonais e pentagonais ao centro de $\mathfrak{I}_t$; portanto, $r(t)$mantém-se constante para t num intervalo $[0, c]$, onde c é o número *crítico* para o qual todas as faces de $\mathfrak{I}_c$ são tangentes à esfera interna do icosaedro.

Para qualquer arquimediano, as faces mais próximas do centro são as de maior número de vértices. Por escolha da FIFA, a Telstar é arquimediana, com $1/3$ de profundidade de truncatura. Portanto, $c > 1/3$, o que prova, para o critério vigente, que

> *A Telstar não é boa bola, pois pode aumentar-se a esfericidade truncando o icosaedro um pouco mais fundo.*

Não será difícil mostrar que o valor crítico de t é dado por

$$c = \frac{12\sqrt{5} - (\sqrt{54} + \sqrt{30})\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{12(\sqrt{5} - 1)},$$

com valor aproximado .3715. A Telstar crítica está representada na figura 2; as suas faces hexagonais são irregulares, com arestas de dois comprimentos distintos, na razão de 1 para .6920. A prova da sua optimalidade e a determinação da esfericidade óptima exigem mergulhar as mãos em pormenores.

CONTAS

A determinação de uma fórmula para a esfericidade $\epsilon(t)$ requer alguns cálculos envolvendo a geometria do triângulo, do pentágono e do hexágono regulares, a indispensável percepção tridimensional e aplicações adequadas do teorema de Pitágoras. É complicado, aborrecido, mas elementar. A figura 3 mostra um corte do icosaedro (de arestas 1) em vias de ser truncado à profundidade t.

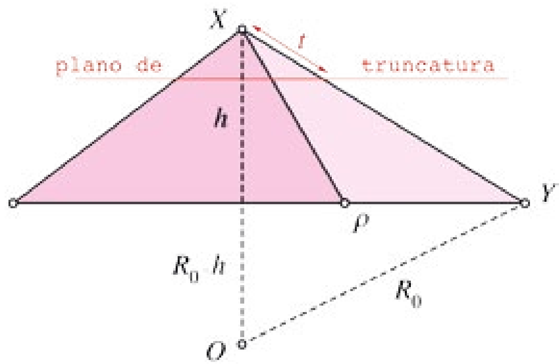


Figura 3. Corte do icosaedro.

Em destaque estão o centro O do icosaedro e dois dos seus vértices, X e Y. O polígono colorido representa a pirâmide pentagonal do icosaedro com vértice em X; o plano da base está de topo, tal como o plano de truncatura, e a aresta $[X, Y]$ está no plano da figura. Interessa calcular o raio externo ρ da base da pirâmide, a sua altura h e o raio externo R_0 do icosaedro:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})} \\ h &= \sqrt{1 - \rho^2} \\ R_0 &= \frac{1}{2h} = \sqrt{\frac{1}{8}(5 + \sqrt{5})}. \end{aligned}$$

[4] Tentativa de tradução do inglês *snub*. A "snubificação" de um poliedro consiste em tomar o invólucro convexo da configuração que se obtém por expansão, *i.e.*, por translação radial das faces do poliedro, acompanhada de rotação planar de cada face em torno do seu centro.

Da figura 3 facilmente resulta que $R_0 - ht$ é a distância das faces pentagonais de $\mathfrak{I}_t$ ao seu centro, e que o raio interno do icosaedro é

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\sqrt{15}.$$

O raio externo $R(t)$ também se 'vê' em verdadeira grandeza na figura. De tudo isto resulta

$$r(t) = \min\{\Delta, R_0 - ht\}$$
$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - (1-t)t}.$$

O parâmetro crítico é a solução da equação $\Delta = R_0 - ht$; calculando e simplificando obtemos o valor de c acima anunciado. Para $t \geqslant c$, a esfericidade é

$$\epsilon(t) = \frac{R_0 - ht}{\sqrt{R_0^2 - (1-t)t}}$$

com numerador e denominador decrescentes. A identidade

$$2h\frac{R(t)^4}{R_0 - ht}\epsilon(t)\epsilon'(t) = (h^2 - 1)t,$$

válida para $t \geqslant c$, mostra que $\epsilon'(t) < 0$ e que $\epsilon(t)$ é decrescente no intervalo em estudo. Portanto, $\mathfrak{I}_c$ é optimal. Pode determinar-se uma expressão exacta, com radicais, para a esfericidade óptima, pouco útil pela complexidade que se adivinha; o valor aproximado

$$\epsilon(c) \approx .9226$$

mostra que o icosaedro decentemente truncado produz uma bola de esfericidade superior à do dodecaedro roscado.

O *QI* DUM ICOSAEDRO TRUNCADO

Sejam V_0 e A_0 o volume do platónico que vai truncar-se e a área da sua superfície limítrofe. Considera-se, em dado vértice X, a pirâmide P que é removida quando truncamos X à profundidade $t=1$. Sejam v_P o volume de P e δ_P a diferença entre a sua área lateral e a da base. O volume e a área da superfície limítrofe do platónico truncado à profundidade t são dados por

$$V(t) = V_0 - nv_Pt^3 \quad \text{e} \quad A(t) = A_0 - n\delta_Pt^2,$$

onde n denota o número de vértices do platónico em causa. No caso do icosaedro, que está na berlinda, $n=12$ e P é a pirâmide da figura 3. (No caso do tetraedro, P é o tetraedro.) O quociente isoperimétrico do platónico truncado é, pois,

$$q(t) = \frac{V(t)^2}{A(t)^3}.$$

As identidades

$$\begin{aligned} A^6\left(\frac{V^2}{A^3}\right)' &= 2VV'A^3 - 2A^2A'V^2 \\ &= 6nVA^2t(\delta_PV - v_PAt) \\ &= 6nVA^2t(\delta_PV_0 - v_PA_0t) \end{aligned}$$

mostram que o sinal da derivada de $q(t)$ é o sinal de $\delta_PV_0 - v_PA_0t$. Portanto, a derivada de $q(t)$ anula-se para um só valor de t, nomeadamente

$$t_0 = \frac{\delta_PV_0}{v_PA_0},$$

$q'(t)$ é positiva para $t < t_0$ e negativa para $t > t_0$. Sendo assim, a truncatura de profundidade t_0 é a única que maximiza o quociente isoperimétrico. A surpresa é que t_0 é o parâmetro crítico c encontrado acima!

> *O icosaedro truncado vencedor do concurso da esfericidade é, também, o de maior QI.*

Mais um desaire para a FIFA, que assim perde em três tabuleiros. O que importa ao matemático, criatura pouco sensível a estas vaidades e que desconfia de coincidências, é encontrar motivos da surpresa mais nobres do que as contas que a ela conduziram.

Ao Professor João Queiró agradeço os muitos aperfeiçoamentos do texto.

REFERÊNCIAS

[1] J. M. Göthals e J. J. Seidel, "The Football", *Nieuw Arch. Wisk.* (3), 29(1981), pp. 50-58.

[2] J. M. Goethals, J. J. Seidel, "Cubature formulae, polytopes and spherical designs", in C. Davis *et al.* (ed.s), *The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift*, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 203-218.

[3] R. Hardin e N. Sloane, "McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions", *Discrete Comput. Geom.*, 15(1996), pp. 429-441.

[4] "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", *https://oeis.org/*, sequência *A000944*, vista em 16-6-2015.

O autor escreve de acordo com a grafia antiga.