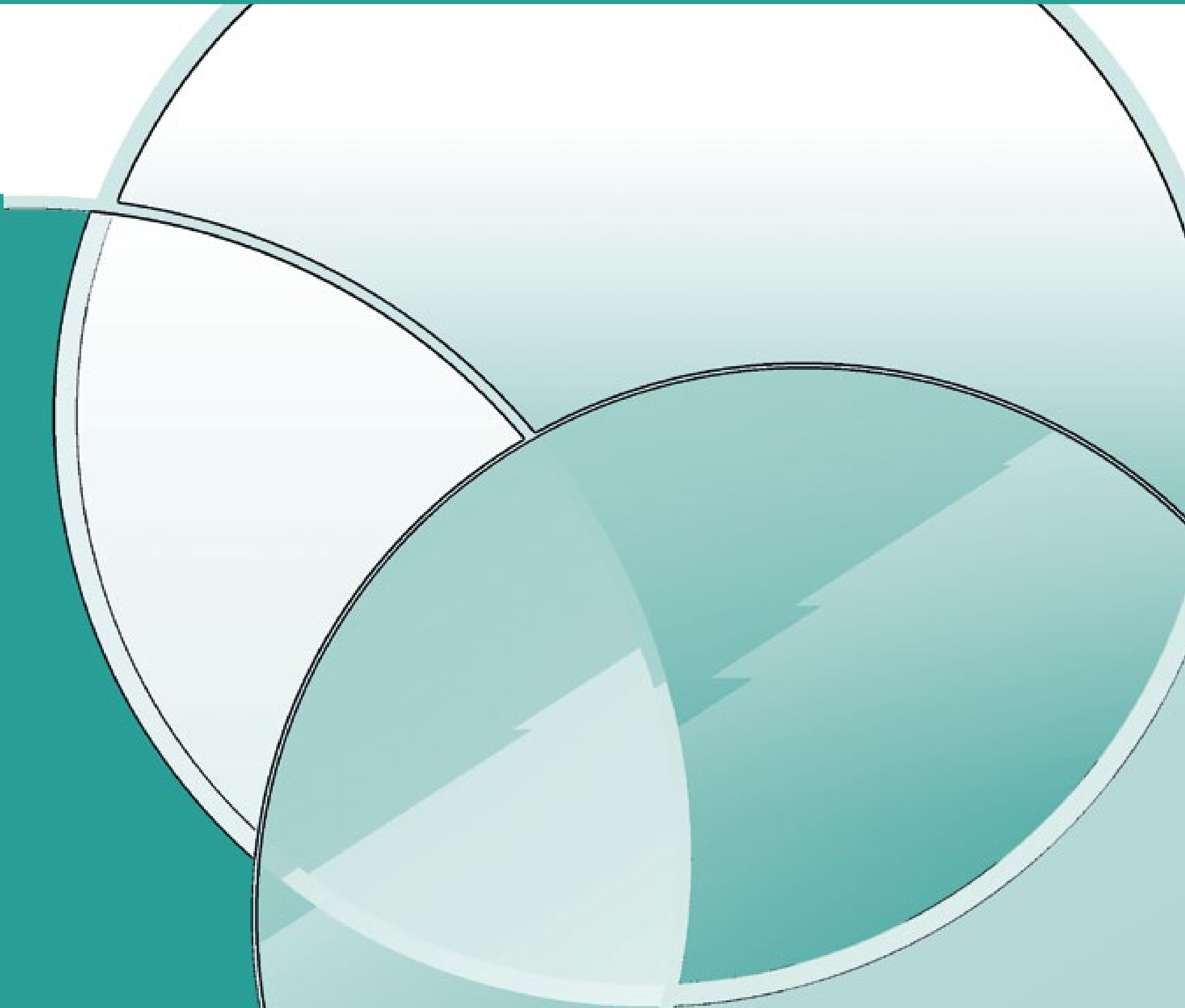

O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE

Gilda Ferreira

Universidade de Lisboa e Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

gmferreira@fc.ul.pt

Com a reintrodução da Teoria dos Conjuntos no programa de matemática do 10.º ano de escolaridade e a referência ao paradoxo de Russell no caderno de apoio ao professor, pareceu-nos pertinente revisitarmos informalmente a temática "classe *versus* conjunto". Pretendemos com este artigo motivar o conceito de classe própria e recordar brevemente a história dos paradoxos que estiveram na génese da Teoria Axiomática dos Conjuntos. Ilustrando que nem toda a coleção de objetos pode ser considerada um conjunto, encerramos o artigo mostrando que não existe o conjunto de todos os conjuntos.

1. CLASSE *VERSUS* CONJUNTO

Ao lermos o título desta secção "Classe *versus* Conjunto" talvez nos ocorram algumas das seguintes considerações/ interrogações:

Todo o conjunto é uma classe.

Nem toda a classe é um conjunto, há classes próprias.

Existem classes que são "muito grandes" para serem conjuntos.

Consigo dar exemplos de classes que não são conjuntos?

Realmente entendo o porquê da distinção conjunto/classe própria?

Neste artigo convidamo-lo a refletir sobre as questões acima e a aprofundar a intuição sobre esta temática acompanhando-nos numa breve viagem pelo desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, surgimento de obstáculos/ paradoxos e sua superação.

2. TEORIA INGÉNUA DOS CONJUNTOS

Quando se pensa em Teoria dos Conjuntos, há um matemático incontornável: Georg Cantor [1845-1918]. Basta pensarmos que a noção de infinito antes de Cantor era um tópico mais filosófico do que matemático. Foi Cantor quem pela primeira vez mostrou que há diferentes "tamanhos" de infinito, por exemplo, o infinito dos números reais é "maior" do que o infinito dos números naturais e este último tem o mesmo "tamanho" que o infinito dos números racionais (numerável). Perceber a importância das correspondências bijetivas na comparação de conjuntos infinitos, estender a aritmética dos números naturais a conjuntos infinitos (cardinais e ordinais), provar que a cardinalidade do conjunto das partes de A é sempre estritamente maior do que a cardinalidade de A (argumento de diagonalização) são exemplos do seu importante contributo na área. Cantor é justamente considerado o inventor da Teoria dos Conjuntos. A versão inicial desta teoria, atualmente conhecida como Teoria Ingénua dos Conjuntos (*Naive Set Theory*)[1] foi posteriormente desenvolvida (formalizada) pelo matemático alemão Gottlob Frege [1848-1925].

A motivação de Frege para apresentar uma formalização da Teoria (Ingénua) dos Conjuntos prendia-se com conseguir desta forma uma fundamentação para a matemática, nomeadamente a redução da aritmética à lógica. Contudo, os problemas não se fizeram esperar. Ainda antes da publicação do segundo volume que completaria a sua obra *Grundgesetze der Arithmetik*[2] [5] (traduzida para inglês em [1]), paradoxos, isto é contradições que derivavam nessa formalização, já eram conhecidos. Frege acrescenta um apêndice a esse segundo volume onde desabafa:

> *Um cientista dificilmente pode deparar-se com algo mais indesejável do que ver os fundamentos ruírem exatamente quando o seu trabalho está terminado. Fui colocado nesta posição por uma carta do Sr. Bertrand Russell, quando o trabalho já estava quase impresso.*
>
> Grundgesetze der Arithmetik, Vol. II., 1903.

---

[1] A designação "Teoria Ingénua dos Conjuntos" é usada não apenas no contexto acima, a propósito das versões de Cantor/Frege, i.e. versões anteriores à atual Teoria Axiomática dos Conjuntos mas também pode referir-se à apresentação informal (no sentido de não axiomatizada) da moderna Teoria dos Conjuntos definida em linguagem natural, suficiente para grande parte do uso corrente da Teoria dos Conjuntos na prática matemática habitual.

[2] *Leis Básicas da Aritmética.*

Na origem do problema, usando terminologia moderna ao invés da notação adotada por Frege, está o facto de se permitir que:

dada uma propriedade $P(x)$ se forme
o conjunto $\{x : P(x)\}$,

ou, dito de outra forma,

dada uma propriedade se forme o conjunto
dos objetos que têm essa propriedade.

Caso não perceba como é que algo aparentemente tão inócuo pode trazer problemas, acompanhe-nos na secção seguinte.

3. SURGIMENTO DE PARADOXOS

A possibilidade de formar conjuntos por compreensão irrestrita, isto é, apresentando uma propriedade que os seus elementos, e apenas esses, possuam[3], está na origem de uma variedade de antinomias (paradoxos) descobertas nos finais do século XIX, princípios do século XX.

Entre esses paradoxos, encontram-se:

Paradoxo de Burali-Forti (1897) $\{x : x \text{ é um ordinal}\}$

Paradoxo de Cantor (1897) $\{x : x \text{ é um cardinal}\}$[4]

Paradoxo de Russell (1901) $\{x : x \notin x\}$

em que assumir a existência dos conjuntos indicados gera contradições.

Os primeiros dois paradoxos requerem conhecimento sobre ordinais ou cardinais. Se o leitor não está familiarizado com estes conceitos, siga para a análise do paradoxo de Russell que, só envolvendo a noção de conjunto e de ser elemento de um conjunto, serve igualmente para ilustrar o risco de abrirmos a porta a contradições ao formarmos conjuntos partindo de certas propriedades.

Cesare Burali-Forti, matemático italiano assistente do bem conhecido Giuseppe Peano[5], notou que, sendo o conjunto dos ordinais um conjunto bem ordenado também devia ele próprio ter um ordinal. Mas então este ordinal teria de ser *i*) maior do que qualquer ordinal no conjunto dos ordinais e *ii*) elemento do conjunto dos ordinais. Ora, a contradição é evidente: um objeto não pode ser simultaneamente elemento de um conjunto e maior do que todos os elementos desse conjunto, em particular, tal elemento teria de ser maior do que ele próprio.

Vejamos o paradoxo que provém de admitirmos que existe o conjunto de todos os cardinais. Seja C tal conjunto. Mas, então, $\bigcup C$ é um cardinal maior do que ou igual a qualquer cardinal em C. Logo, $2^{\bigcup C}$ é um cardinal estritamente maior do que qualquer cardinal em C. Contradição, visto C conter todos os cardinais.

Se os anteriores paradoxos passaram ligeiramente despercebidos, o paradoxo de Russell, descoberto por Bertrand Russell mas também, independentemente, por Ernst Zermelo, teve enorme visibilidade à época e forte impacto nos esforços de fundamentação da matemática que se seguiram.

Suponhamos que existe $\{x : x \notin x\}$, isto é, existe o conjunto de todos os conjuntos que não são elemento de si próprios. Seja S tal conjunto. Ou bem que $S \in S$ ou $S \notin S$. Ora vejamos que em ambos os casos incorremos numa contradição. Se $S \in S$, pela forma como S está definido (qualquer seu elemento verifica a propriedade de não ser elemento dele próprio), concluímos que $S \notin S$, o que é absurdo. Se $S \notin S$, novamente pela definição de S, então S não verifica a propriedade de não ser elemento de si próprio, ou seja S é elemento de si próprio, i.e., $S \in S$. Absurdo.

Uma variante popular derivada do Paradoxo de Russell é o Paradoxo do Barbeiro[6]:

Uma cidade (digamos Sevilha) tem um único barbeiro. Esse barbeiro é do sexo masculino, é de Sevilha e reúne as duas condições seguintes:

1) Faz a barba a todos os homens de Sevilha que não fazem a barba a si próprios
2) Só faz a barba aos homens que não fazem a barba a si próprios.

Fará o barbeiro a barba a si próprio?

Se fizer a barba a si próprio, pela condição 2) não pode fazer a barba a si próprio. Se não fizer a barba a si próprio, pela condição 1) faz a barba a si próprio.

O Paradoxo de Russell foi comunicado pelo próprio Russell a Frege, numa carta de 1902 ([6], páginas 124-125).

Frege responde:

> *A sua descoberta de contradição causou-me a maior das surpresas e, quase diria, consternação, dado que abalou as bases sobre as quais pretendia construir a aritmética. [...] Mais grave [...] não apenas a fundamentação da minha aritmética mas a possibilidade da fundamentação da aritmética parece desaparecer.*
>
> Carta para Bertrand Russell, 1902 ([6], páginas 126-128).

A Teoria dos Conjuntos (mais concretamente, a Teoria

Ingénua dos Conjuntos) com pretensões de ser rocha firme onde edificar a matemática, dava origem a contradições. Dado que conjuntos estão na base de praticamente todos os ramos da matemática, muitos interrogavam-se sobre se as provas matemáticas seriam fiáveis. O clima de incerteza entre os matemáticos da época estava instalado. Se algo tão natural como definir um conjunto pela propriedade comum aos seus elementos e só a estes podia resultar em algo absurdo, como seria seguro avançar-se? Estaria a (fundamentação da) matemática ferida de morte?

4.CONTORNAR OS PARADOXOS: TEORIA AXIOMÁTICA DOS CONJUNTOS

Grandes desafios atraem grandes pensadores e, provavelmente como em nenhuma outra altura da história da matemática, eminentes matemáticos dedicaram-se a questões lógicas relacionadas com a fundamentação da matemática. Russell surge com a Teoria dos Tipos (versão simples e ramificada), posteriormente desenvolvida por Alonzo Church, David Hilbert apresenta o seu programa de fundamentação da matemática (que ficou conhecido como *Hilbert's program* [2]), mais tarde parcialmente inviabilizado por Kurt Gödel, Luitzen Brouwer desenvolve o intuicionismo, Zermelo propõe a primeira Teoria Axiomática dos Conjuntos, aperfeiçoada mais tarde por Abraham Fraenkel, dando origem à forma atualmente mais comum de fundamentação da matemática: a Teoria Axiomática dos Conjuntos ZFC (acrónimo para *Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of choice*).

É esta última estratégia de superação dos paradoxos, via Teoria Axiomática dos Conjuntos, que brevemente analizaremos nesta secção.

Com os paradoxos tornou-se evidente que há propriedades que não podem determinar conjuntos. Intuitivamente, a ideia era tentar limitar as condições a partir das quais se formam conjuntos de forma a eliminar os paradoxos, mas mantendo ainda assim todos os conjuntos necessários em matemática.

O princípio da compreensão irrestrita que, dada uma propriedade $P(x)$, assegurava a existência do conjunto $\{x : P(x)\}$ foi substituído pelo mais restritivo axioma da separação (também conhecido por compreensão restrita) que,

dada uma propriedade $P(x)$[7] e um conjunto C assegura a existência do conjunto $\{x \in C : P(x)\}$,

isto é,

assegura a existência do conjunto cujos elementos são os elementos de C que satisfazem P.[8]

Conjuntos agora formados por compreensão são necessariamente subconjuntos doutros conjuntos já existentes. Limitando desta maneira a formação de conjuntos evitam-se os anteriores paradoxos[9]. Por exemplo, não mais se pode formar o conjunto $\{x : x \notin x\}$.[10]

Debruçámo-nos em particular sobre o axioma da separação pelo seu impacto em evitar os paradoxos da Secção 3, mas obviamente ZFC tem outros axiomas que nos indicam que conjuntos podem ser formados e que operações sobre conjuntos dão origem a conjuntos.

Note, por exemplo, que o novo axioma da compreensão (compreensão restrita) só constrói conjuntos se pelo menos um conjunto já tiver sido anteriormente formado. Em ZFC, o axioma do vazio e o axioma do infinito garantem respetivamente a existência do conjunto vazio e de um conjunto infinito. Sobre ZFC, sugerimos a leitura de [3], [4] ou [7]. Para uma exposição detalhada do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos consulte [8].

---

[3] Também conhecido como Princípio da Abstracção.

[4] Há uma outra antinomia também conhecida por Paradoxo de Cantor, descoberta por Georg Cantor em 1899, que consiste na possibilidade de derivar uma contradição a partir do conjunto universal (conjunto de tudo), ou conjunto de todos os conjuntos. Reservamos as considerações sobre o conjunto de todos os conjuntos (que dá o título ao artigo) para a última secção.

[5] Autor da axiomática *standard* para os números naturais, a *Aritmética de Peano*.

[6] O paradoxo do barbeiro foi divulgado pelo próprio Russell para ilustrar que algo aparentemente inócuo pode ser logicamente impossível.

[7] Formalmente, em ZFC, uma propriedade é dada por uma fórmula da linguagem de Teoria dos Conjuntos, isto é, a linguagem do Cálculo de Predicados com igualdade munida do símbolo relacional binário $\in$.

[8] A designação de axioma da separação é justificado pelo facto de, a partir de um conjunto, se justificar a existência de dois outros, separando o primeiro no conjunto dos elementos que verificam a propriedade e no conjunto dos elementos que não verificam a propriedade (substituindo $P(x)$ por $\neg P(x)$).

[9] Acredita-se que a Teoria Axiomática dos Conjuntos ZFC é consistente e, portanto, livre não apenas destes mas de quaisquer paradoxos. Contudo, pelos teoremas de incompletude de Gödel, sabemos que a consistência de ZFC não se pode provar em ZFC.

[10] Note que, ainda que $P(x)$ possa, por exemplo, ser a propriedade $x \notin x$, o conjunto $\{x \in C : x \notin x\}$, que se forma por separação, não oferece problemas. O leitor pode pensar que é contra-intuitivo haver um conjunto que pertença a si próprio. Em ZFC, o axioma da fundação impede tal possibilidade e, portanto, $\{x \in C : x \notin x\}$ é simplesmente C.

5. O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS NÃO EXISTE

Como vimos na secção 4, o argumento de Russell não produz nenhuma contradição em ZFC. Nesta secção iremos mostrar que pode ser usado para demonstrar um importante resultado nesta teoria: Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

Teorema 1. *O conjunto de todos os conjuntos não existe.*

Demonstração. Suponhamos, com vista a absurdo, que existia U o conjunto de todos os conjuntos. Apliquemos o axioma da separação ao conjunto U (isto é, $C = U$) e à propriedade $x \notin x$ (isto é, $P(x) := x \notin x$). Garantiríamos desta forma a existência do conjunto de todos os conjuntos que não são elemento de si próprios, ou seja seríamos de novo conduzidos ao paradoxo de Russell. A contradição resulta do facto de termos suposto que existia o conjunto de todos os conjuntos. Provamos assim que tal conjunto não existe.

□

Chama-se classe a uma coleção de objetos definida por uma propriedade. Uma classe que não seja um conjunto diz-se uma classe própria.

A coleção de todos os conjuntos, que acabámos de verificar no Teorema 1 não é um conjunto, é uma classe própria (pense, em ZFC, na propriedade $x = x$ verificada por qualquer conjunto).

Outras classes próprias em Teoria dos Conjuntos[11] i.e., classes que não são conjuntos, são, por exemplo, a classe de todos os ordinais e a classe de todos os cardinais. Muitos outros exemplos de classes próprias haveria para dar. Só como curiosidade, aqui ficam alguns: a classe de todos os pares ordenados, a classe de todas as funções, a classe de todos os conjuntos singulares, a classe de todos os grupos, a classe de todos os espaços vetoriais. Para um estudo mais detalhado de alguns dos tópicos abordados neste artigo, incluindo conjuntos e classes, sugerimos a leitura de [9].

REFERÊNCIAS

[1] P. A. Ebert and M. Rossberg.*Gottlob Frege: Basic Laws of Arithmetic*. Oxford University Press, 2013.

[2] F. Ferreira. "No Paraíso sem Convicção... Uma Explicação do Programa de Hilbert." *Em Matemática e Cultura II*, Centro Nacional de Cultura e SPB Editores, organização de Furtado Coelho, páginas 87-121, 1995.

[3] F. Ferreira. "Teoria dos Conjuntos: Uma Vista." *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 38:29-47,1998.

[4] A. J. Franco de Oliveira. *Teoria de Conjuntos, Intuitiva e Axiomática (ZFC).* Livraria Escolar Editora, 1982.

[5] G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik.* Verlag Hermann Pohle, (Vol. I) 1893, (Vol. II) 1903.

[6] J. Heijenoort. *From Frege to Gödel.* Harvard University Press, 1967.

[7] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory.* Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 3rd edition, 1999.

[8] A. Kanamori. "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen". *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2:1-71, 1996.

[9] B. Sheppard. *The Logic of Infinity.* Cambridge University Press, 2014.

A autora agradece o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (UID/MAT/04561/2013 e SFRH/BPD/93278/2013), dos centros LaSIGE – Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala e CMAFIO – Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional da Universidade de Lisboa e do NIM – Núcleo de Investigação em Matemática da Universidade Lusófona.

SOBRE A AUTORA

Gilda Ferreira é doutorada em Matemática, área de Álgebra, Lógica e Fundamentos, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Detém atualmente uma bolsa de pós-doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no Lasige (Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala) - Universidade de Lisboa. É membro do CMAFIO (Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional).

[11] Note que ZFC não permite agir sobre classes próprias, ZFC só lida com conjuntos - as suas quantificações, $\forall x, \exists x$, devem ser lidas como *para todo o conjunto* x e *existe um conjunto* x respetivamente. Repare contudo que tal x varia sobre o universo de todos os conjuntos, isto é, sobre o que na metalinguagem chamamos classe própria. Há outras teorias de conjuntos que foram precisamente desenhadas para admitirem classes próprias, entre elas encontram-se, por exemplo, a NBG (*von Neumann-Bernays-Gödel set theory*) e a MK (*Morse-Kelly set theory*).