

Généralisation d'un théorème de Morgado

par Stéphane Foldes

Paris

Dans son étude «On the closure operators of the cardinal sum of partially ordered sets» (Proc. Ams. Ser. A, 64/1961), MORGADO a démontré le théorème suivant: si M_1 et M_2 sont des ensembles partiellement ordonnés, chacun ayant un minimum et un maximum, $M_1 \oplus M_2$ leur somme ordinale et si pour un ensemble partiellement ordonné P on désigne par $\Phi(P)$ l'ensemble partiellement ordonné des opérateurs de fermeture sur P , alors on a:

$$\Phi(M_1 \oplus M_2) \simeq 2 \times \Phi(M_1) \times \Phi(M_2),$$

où \times désigne le produit cardinal.

Puis il généralise ce résultat par récurrence à une somme ordinale à n composants.

Terminologie, notations:

Soient P un ensemble partiellement ordonné et Q_p un ens. p. ord. pour chaque $p \in P$. Considérons l'ensemble des couples (x, p) avec $p \in P$, $x \in Q_p$ et ordonnons — le comme suit:

$$(x_1, p_1) \leq (x_2, p_2) \Leftrightarrow (p_1 = p_2 \text{ et } x_1 \leq x_2 \\ \text{dans } Q_{p_1} = Q_{p_2} \text{ ou } p_1 < p_2).$$

L'ens. p. ord. ainsi obtenu est appelé somme (P, \leq) -ordonnée de la famille $(Q_p)_{p \in P}$ et il est désigné par $\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p$. La somme ordinale, la somme cardinale et le produit ordinal sont des cas particuliers de cette définition.

Un ens. p. ord. P est une demi-racine (resp. demi-racine relativement bien ordonnée) si la section finale de chaque élément de P est une chaîne (resp. une chaîne bien ordonnée). Si de plus chaque élément de P est majoré par un élément maximal, on dira que P est relativement majoré.

Soient P une demi-racine relativement bien ordonnée et Q_p un ens. p. ord. avec éléments minimum O_p et maximum u_p , pour $\forall p \in P$.

Définissons une application:

$$F: \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p) \rightarrow \Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right);$$

pour $a \in \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p)$ (produit cardinal),

$$a = (\varphi, \dots, \varphi_p, \dots),$$

l'opérateur $F(a) \in \Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right)$ est défini comme suit: soit $(x, p) \in \sum_{p \in (P, \leq)} Q_p$; alors,

$$\begin{aligned} \text{si } \varphi(p) = p, \quad F(a)(x, p) &= (\varphi_p(x), p); \\ \text{si } \varphi(p) > p \text{ et } \varphi_p(x) < u_p, \\ F(a)(x, p) &= (\varphi_p(x), p); \\ \text{si } \varphi(p) > p \text{ et } \varphi_p(x) = u_p, \\ F(a)(x, p) &= (\varphi_{p'}(O_{p'}), p'), \end{aligned}$$

où p' est le premier élément de (p, \rightarrow) vérifiant $\varphi(p') = p'$ ou $\varphi_{p'}(O_{p'}) < u_p$.

On a:

$$a \leq b \Leftrightarrow F(a) \leq F(b).$$

