Cardinalidade de um conjunto de anéis

por O. T. Alas
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

O objectivo desta nota é responder a uma questão que nos foi proposta pelo Professor NEWTON C. A. da COSTA do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. *Questão:* Sendo E um conjunto infinito, qual a cardinalidade do conjunto dos anéis sobre E e qual a cardinalidade do conjunto dos grupos sobre E? Demonstraremos que a resposta de ambas as perguntas é $2^{|E|}$.

Nesta Nota as operações de adição e multiplicação dos vários anéis considerados serão sempre indicadas, respectivamente, por $+$ *e* $\cdot$, o que não acarretará confusão pois em cada caso precisaremos quais as operações em questão.

1. Seja E um conjunto infinito e $|E|$ o seu número cardinal. Seja E_1, $E_1=(E,+,\cdot)$, um anel sobre E. Em $E\times E$ consideremos as operações de adição (denotada com o sinal $+$) e de multiplicação (denotada com o sinal $\cdot$) definidas do seguinte modo: para quaisquer $x,y,r,s\in E$

$$(1)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=(x+y,r+s)\\(x,r)\cdot(y,s)&=(x\cdot y,r\cdot s)\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (1) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em E_1. Posto isto, designaremos por A o anel $(E\times E,+,\cdot)$, cujas operações estão definidas em (1).

Denotemos por 0 o elemento neutro da adição em E_1 e sejam a e b dois elementos de E, tais que $0\neq a\neq b\neq 0\neq a+b$ (onde $+$ designa a adição em E_1).

A seguir vamos definir $2^{|E|}$ funções injetoras de $E\times E$ sobre $E\times E$. Para cada subconjunto X de E, com $0\in X$, ponhamos

$$(2)\qquad \begin{aligned}f_X: E\times E&\to E\times E\\(x,0)&\to(x,0)\\(x,a)&\to(x,b)\\(x,b)&\to(x,a)\\(y,0)&\to(y,a)\\(y,a)&\to(y,b)\\(y,b)&\to(y,0)\\(z,r)&\to(z,r)\end{aligned}$$

para quaisquer $x\in X$ $y\notin X$, $z\in E$ e $r\in E$, $r\notin\{0,a,b\}$.

Para cada X nas condições acima, indiquemos por $A(X)$ o anel sôbre $E\times E$ cujas operações de adição (denotada por $+$) e de multiplicação (denotada por $\cdot$) definimos abaixo: para quaisquer $x,y,r,s\in E$

$$(3)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))+f_X^{-1}((y,s)))\\(x,r)\cdot(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))\cdot f_X^{-1}((y,s))),\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (3) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em A.

PROPOSIÇÃO 1. *Sejam* X *e* Y *dois subconjuntos de* E *tais que* $0\in X\cap Y$, $X\neq Y$. *Nestas condições, os anéis* A(X) *e* A(Y) *são distintos.*