Outra demonstração de um teorema de A. H. Stone

por O. T. Alas
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de São Paulo, Brasil

O prof. Dr. Edison Farah (professor catedrático de Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo) nos propôs procurar uma demonstração do Teorema de A. H. Stone [1] que utilizasse o Teorema de Zorn ao invés da Indução Transfinita. Uma demonstração nestas condições teria importância didática. Daremos aqui um prova do referido teorema, usando o Teorema de Zorn e, procurando seguir, tanto quanto possível, a ordem de ideias da demonstração original [1].

Antes, porém, recordaremos algumas definições e introduziremos certas notações.

1 — Seja $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de E (1). Para todo subconjunto Y de E indicaremos por $(Y; \mathcal{U})$ o conjunto dos $X \dot{\in} \mathcal{U}$ tais que $X \cap Y \neq \phi$ e por $(Y; -\mathcal{U})$ o conjunto dos $x \in Y$ tais que $(\{x\}; \mathcal{U}) \subset Y$.

No caso de trabalharmos com uma sequência, $(\mathcal{U}_n)$, de recobrimentos abertos, simplificaremos a notação pondo, para todo $Y \subset E$ e para todo $n \geq 1$,

$$(Y; \mathcal{U}_n) = (Y; n) \quad \text{e} \quad (Y; -\mathcal{U}_n) = (Y; -n).$$

(1) Sendo $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{U}$ é um recobrimento aberto de E se $\mathcal{U}$ é uma família de conjuntos abertos cuja reunião é E. Indicaremos por $X \dot{\in} \mathcal{U}$ o fato de ser X um têrmo da família $\mathcal{U}$.

2 — Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ dois recobrimentos abertos de um espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$. Dizemos que $\mathcal{W}$ é um Δ-refinamento de $\mathcal{U}$ se para todo $x \in E$, existe $U \dot{\in} \mathcal{U}$, verificando

$$(\{x\}; \mathcal{W}) \subset U.$$

3 — Um espaço topológico se diz totalmente normal («fully normal») se todo seu recobrimento aberto admite um Δ-refinamento aberto que recobre o espaço.

4 — Um espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$ é paracompacto se para todo recobrimento aberto de E, existe um recobrimento aberto de E, que o refina e é localmente finito.

Nota — Se num espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$, totalmente normal, para um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de E, existe $\mathcal{W}$, recobrimento localmente finito de E (não necessàriamente aberto) que o refina, então existe um recobrimento aberto de E, localmente finito, que refina $\mathcal{U}$.

Pôsto isto, passaremos à demonstração do

Teorema de Stone. *Todo espaço topológico totalmente normal é paracompacto.*

Demonstração. Seja $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico totalmente normal e seja $(W_i)_{i \in I}$ um recobrimento aberto de E; tomemos