Note sur un Lemme de Kronecker

par Luc M. Venet
Paris

Nous nous proposons d'étendre au cas continu une proposition attribuée à KRONECKER dont l'énoncé est le suivant:

PROPOSITION. Si $\{U_n, n \geqslant 1\}$ est une suite non-décroissante de réels positifs tendant vers $+\infty$, et si la suite de nombres réels $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ est telle que la limite $\lim\limits_{n \uparrow \infty} \sum\limits_1^n U_m^{-1} Y_m$ existe et est *finie* alors:

$$\lim_{n \uparrow \infty} U_n^{-1} \sum_1^n Y_m = 0 .$$

Dans le cas continu la proposition devient:

PROPOSITION. Si $g(x)$ est une fonction reelle non-décroissante, positive tendant vers $+\infty$ (et ne s'annulant en aucun point) et si la fonction reelle $f(x)$ est telle que la limite: $\lim\limits_{X \uparrow \infty} \int^X \frac{f(x)}{g(x)} dx$ existe et est *finie*.

Alors si $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ existe et est continue

$$\lim_{X \uparrow \infty} \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\, dx = 0 .$$

DÉMONSTRATION. La proposition n'est pas absolument triviale car les inégalités classiques sur les intégrales n'aboutissent pas.

Notons d'abord que puisque $g'(x)$ existe et que $g(x)$ est non-décroissante, nous avons $g'(x) \geqslant 0$.

Le premier pas consiste à exprimer $\int_0^X f(x)\, dx$ d'une manière qui permette d'exploiter les hypothèses.

D'une manière évidente on a: $\int_0^X f(x)\, dx =$

$$= \int_0^X \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\, dx .$$

Maintenant posant: $\frac{f(x)}{g(x)} dx = du$; $g(x) = v$; et en intégrant par parties:

$$\int_0^X f(x)\, dx = \left[g(x) \int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right]_0^X -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx =$$

$$= g(X) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx .$$

Ajoutant et retranchant la quantité $g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt$ nous obtenons:

$$\int_0^X f(x)\, dx = (g(X) - g(0)) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx +$$

$$+ g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt = \int_0^X g'(x)\, dx \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt +$$

$$+ \int_0^X g'(x) \left(\int_x^0 \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx +$$

$$+ g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt =$$