Remarque sur le Théorème de Rado

par A. S. Gonçalves et J. M. S. Simões Pereira

SOMMAIRE

Dans ce mémoire nous établissons la validité du théorème de RADO [*1, page 18*], *pour le cas où la loi* E *fait correspondre à un ensemble fini d'entiers I, un ensemble fini d'entiers* E *(I). Pour une telle loi la conclusion du théorème reste valable si le graphe est localement et progressivement fini.*

*

* *

Dans la deuxième édition de [1], BERGE a énoncé le théorème suivant:

THÉORÈME DE RADO: *Considérons un graphe localement fini* (X, Γ), *un ensemble fini d'entiers* K *et une loi* E *qui fait correspondre à tout* $I \subset K$ *un ensemble* $E(I) \subset K$; *si, sur tout sous-graphe fini* (A, Γ_A), *il existe une fonction* $\varphi_A(x)$ *à valeurs entières telle que* $\varphi_A(x) \in E[\varphi_A(\Gamma_A x)]$ $(x \in A)$, *alors il existera sur* X *une fonction* $\varphi(x)$ *à valeurs entières telle que*

$$\varphi(x) \in E[\varphi(\Gamma x)] \quad (x \in X).$$

La loi E qui fait correspondre à un ensemble d'entiers I, un ensemble d'entiers $E(I)$, ne peut pas en effet être énoncée sans restrictions du moins pour la démonstration présentée par BERGE, c'est-à-dire, qu'on doit prendre un ensemble fini d'entiers K auquel tous les nombres entiers, mis en jeu par la loi E, appartiennent. C'est ce fait que BERGE a oublié dans la première édition de [1]; ce faisant, la démonstration qu'il y présente n'est plus valable.

Le but de ce mémoire est de montrer que, si le graphe est localement et progressivement fini, la susdite restriction peut être enlevée.

On utilise dans ce qui suit les notations de [1]. La démonstration de notre résultat étant très semblable à celle donnée dans [1], il faut tout simplement présenter une nouvelle justification du fait que le nombre des restrictions des fonctions φ_n reste fini, quand n varie.

Nous justifierons ce fait en montrant que, quand n varie, sur tout sommet où elles soient définies, les fonctions φ_n elles-mêmes ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes.

En effet, si le graphe est progressivement fini il y a au moins un sommet sans descendants; donc, nous désignerons par $\{a\}$ l'ensemble de ces sommets, par a l'un de ses éléments et nous considérerons une fonction φ_n définie sur un ensemble A_n tel que $a \in A_n$. On aura:

$$\varphi_n(a) \in E[\varphi_n(\Gamma a)] = E[\emptyset].$$

Nous écrivons Γ et non pas Γ_n parce que, pour tout sommet, Γ_n devient identique à Γ pour n suffisamment grand.

Au delà d'une certaine valeur de n on aura toujours $\varphi_n(a) \in E[\emptyset]$ et les fonctions φ_n prendront sur a un nombre fini de valeurs différentes car sinon la loi E ferait correspondre à l'ensemble vide $\emptyset$ un ensemble infini d'entiers ce qui contredirait l'hypothèse.

Considérons maintenant un sommet $x_0 \notin \{a\}$. Pour n suffisamment grand on aura: $\varphi_n(x_0) \in E[\varphi_n(\Gamma x_0)]$.