Um Teorema sobre quasigrupos subtractivos

por Eliane Cordeiro da Silva [1]

Em [1] dão-se vários sistemas de axiomas para quasigrupos subtractivos. Cada sistema é constituído por dois axiomas independentes. Assim, por exemplo, mostra-se que um quasigrupo subtractivo é um grupoide $<G,\cdot>$ que verifica as seguintes condições:

(1): $b \cdot b\,a = a$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(2) $c\,b \cdot c\,a = a\,b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

No mesmo artigo (Teorema 3), mostra-se que um grupoide $<G,.>$ que satisfaz as condições

(a) *a equação* $a\,x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(b) $a\,c \cdot b\,c = a\,b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$;

é um quasigrupo com identidade direita.

É fácil verificar que um grupoide $<G,\cdot>$ que satisfaça às condições (a) e (b) não é necessàriamente um quasigrupo subtractivo.

Com efeito, consideremos um grupo não abeliano $<G,\odot>$ e definamos em G a seguinte operação. :

$a \cdot b = a \odot b^{-1}$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$.

$<G,\cdot>$ satisfaz às condições (a) e (b) e, no entanto, não é um quasigrupo subtractivo, porque, por exemplo,

$$b \cdot b\,a = b \odot (b\,a)^{-1} = b \odot (b \odot a^{-1})^{-1} = \\ = b \odot (a \odot b^{-1}) \neq a$$

em virtude de $<G,\odot>$ ser um grupo não abeliano.

O objectivo desta nota é estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Um grupoide* $<G,\cdot>$ *é um quasigrnpo subtractivo, se e só se tem lugar algum dos seguintes sistemas de axiomas:*

Sistema S:

S 1: *a equação* $y\,a = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S 2: $c\,b \cdot c\,a = a\,b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

Sistema S':

S' 1: *a equação* $a\,x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S' 2: $c\,b \cdot c\,a = a\,b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

DEM. Basta provar que os sistemas de axiomas S, S' e $\{(1), (2)\}$ são equivalentes.

1) $S \Rightarrow S'$.

Como $S'2 = S2$, é suficiente mostrar que $S \Rightarrow S'1$.

---

[1] Bolsista do Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, Brasil.