DIVISÃO EUCLIDIANA, CALENDÁRIOS, ANOS BISSEXTOS... E SEXTA-FEIRA, DIA 13

Paulo Sérgio Argolo
Sociedade Brasileira de Matemática
pauloargolo@bol.com.br

1. ALGUMAS PALAVRINHAS INICIAIS

Este artigo pretende responder às seguintes perguntas sobre o tema calendário:

1. Como reconhecer se um dado ano é bissexto ou não?
2. Porque é que os anos bissextos são assim chamados?
3. Como determinar o dia da semana em que caiu ou cairá determinada data?
4. É verdade que os calendários se repetem de 28 em 28 anos?
5. A sexta-feira, dia 13, ligada a tantas superstições, ocorre todos os anos? Quantas vezes?

Todas as respostas dadas se apoiam basicamente na conhecida divisão euclidiana e no conceito de múltiplo, sempre no universo $N = \{0, 1, 2, 3...\}$ dos números naturais.

Entretanto, usamos ainda um critério de divisibilidade por 4: um número natural, constituído por, pelo menos, dois algarismos, só é múltiplo de 4 quando os seus dois algarismos finais formam um múltiplo de 4.

Recorremos, num dado momento (e demonstramos), o seguinte teorema: "Dados n números naturais consecutivos, um deles, e somente um, é múltiplo de n."

Sem esquecer também que falar em anos bissextos conduz, inevitavelmente, a falar em progressões aritméticas, ainda que de forma bem elementar.

Convém lembrar que a divisão euclidiana de um número natural a por outro natural $b \neq 0$ consiste em obter dois outros naturais q e r, com $0 \leq r < b$, de modo a que se tenha $a = bq + r$.

Os calendários e a sua mais generosa companheira: a matemática. Uma parceria que vence o tempo.

Os números q e r são, respetivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de a por b.

O teorema que garante a existência (e a unicidade) dos números q e r é chamado geralmente teorema do algoritmo da divisão euclidiana e a sua demonstração figura em praticamente todos os textos introdutórios à teoria dos números.

Quando $r = 0$, o número a é um múltiplo do número b, enquanto b é um divisor de a.

Como o artigo lida frequentemente com os chamados anos bissextos, optamos por abordar esse assunto imediatamente na secção abaixo.

2. RECONHECIMENTO DOS ANOS BISSEXTOS E ORIGEM DESSA DESIGNAÇÃO

O nosso atual calendário (o gregoriano) surgiu mediante a bula pontifícia *Inter gravissimas*, promulgada pelo Papa Gregório XIII (1502 – 1585) em 24 de fevereiro de 1582, com a finalidade de corrigir o calendário que até então vigorava em todo o mundo cristão (o juliano).

Como o erro comprovado era de dez dias de atraso em relação ao Sol, tornava-se necessário que todos os países cristãos fizessem, simultaneamente, a devida atualização e, assim, foi escolhida a quinta-feira, 4 de outubro de 1582, para o novo calendário entrar em vigor. Desse modo, o dia seguinte, sexta-feira, já não seria o 5, mas o 15. De facto, isso foi feito na maioria dos países cristãos.

O novo calendário sofreria, entretanto, fortes resistências em muitas partes do mundo, especialmente nos países protestantes, que preferiam, segundo o ilustre astrónomo alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), "estar em desacordo com o Sol a estar de acordo com o Papa". Em Inglaterra, por exemplo, o povo revoltou-se e encheu as ruas, gritando: "Não admitimos que o Papa nos roube 10 dias! Queremos os nossos 10 dias!"

Assim, o novo calendário foi implantado nas terras britânicas com quase dois séculos de atraso: em 1752.

Outros países adotaram a reforma do Papa ainda mais tardiamente. A Rússia, por exemplo, só a adotou em 1918. A Grécia, somente em 1924.

O calendário gregoriano apresenta grande precisão: somente após 3333 anos de uso é que será preciso eliminar um dia para corrigir o avanço do calendário sobre o Sol.

Passemos agora aos anos bissextos.

Podemos dizer, caro leitor, que os anos bissextos, de acordo com o calendário gregoriano, são os múltiplos de 4 (maiores do que 1582), mas não de 100, e os múltiplos de 400. Noutras palavras, anos bissextos são todos os múltiplos de 4 maiores do que 1582, exceto aqueles que são múltiplos de 100, mas não de 400. Estes, designaremo-los por anos pseudobissextos .

Os anos bissextos, como sabemos, ocorrem, geralmente, de quatro em quatro anos e têm mais um dia do que os anos comuns: é o dia 29 de fevereiro. Isto é, os anos comuns têm 365 dias, enquanto os anos bissextos têm 366 dias. Os anos pseudobissextos, como vimos acima, são anos comuns.

Uma regra simples para o reconhecimento dos anos bissextos é a seguinte:

▶ Ano que não seja múltiplo de 100

Só é bissexto quando é múltiplo de 4, ou seja, quando os seus dois últimos algarismos formam um múltiplo de 4.
Assim, por exemplo, 1740 foi um ano bissexto, pois 40 é múltiplo de 4; enquanto 2018 não será bissexto, pois 18 não é múltiplo de 4.

▶ Ano múltiplo de 100

Só é bissexto quando for múltiplo de 400.
Assim, 1600 e 2000 foram anos bissextos, mas 1700 e 1900 não.

Agora uma simples perguntinha: porque é que os anos bissextos são assim chamados?
Vejamos como explicar.

O imperador romano Júlio César (100 – 44 a.C.) instituiu um novo calendário (o juliano) no ano 45 a.C., introduzindo um dia extra no mês de fevereiro, entre os dias 24 e 25.

Esse dia extra não recebia nenhum número. Nessa época, fevereiro tinha, normalmente, 29 dias. Os romanos, que costumavam contar retroativamente os dias finais do mês, partindo do dia inicial do mês seguinte, procediam assim:

1.° de março (primeiro), 29 de fevereiro (segundo), 28 (terceiro), 27 (quarto), 26 (quinto), 25 (sexto), dia extra (segundo sexto), 24 (sétimo).

O dia extra era chamado, em latim, *bis sextus dies ante calendas Martias* (segundo sexto dia antes das calendas de março). *Kalendae* (calendas) era o nome que os romanos davam ao dia primeiro de todos os meses.

Bem... da expressão latina *bis sextus* surgiu a palavra portuguesa bissexto.

3. DETERMINANDO O DIA DA SEMANA

Continuando com a aritmética dos calendários, vejamos agora três questões sobre datas e as respetivas resoluções.

1. Em que dia da semana cairá o n-ésimo dia posterior a uma segunda-feira?

Bem... não é difícil responder à pergunta. Basta efetuarmos a divisão euclidiana de n por 7: $n = 7q + r$ (q e r são, respetivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de n por 7.)

Logo, n dias são q semanas e r dias ($0 \leq r < 7$).

Devemos então avançar r dias na semana. Quer dizer, o n-ésimo dia posterior a uma segunda-feira cairá no dia da semana que ocorre r dias após a segunda-feira.
Se tivermos, por exemplo, $n = 1000$, poderemos escrever:

$$1000 = 142 \times 7 + 6$$

Assim, 1000 dias são 142 semanas e seis dias.
Avançaremos então seis dias na semana: o milésimo dia posterior a uma segunda feira é, portanto, um domingo.

2. Num determinado ano, uma data qualquer cai numa quarta-feira. Em que dia da semana cairá no ano seguinte?

Creio que não será difícil notarmos que no ano seguinte a data cairá numa quinta-feira ou numa sexta-feira.
De facto:

– Não havendo entre as datas consideradas o dia 29 de fevereiro (próprio de ano bissexto), a resposta será quinta-feira, pois a data do ano seguinte é o 365.° dia posterior à data do ano inicial, e $365 = 52 \times 7 + 1$.

– Caso haja o dia 29 de fevereiro entre as datas, o intervalo entre elas será de 366 dias, ou seja, a data do ano seguinte será o 366.° dia posterior à data do ano inicial dado. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, a data, no ano seguinte, avançará dois dias na semana em relação à data inicial e, portanto, será uma sexta-feira.

3. Observando um calendário, vemos que o Natal de 2015 ocorre numa sexta-feira. Em que dia da semana caiu o Natal de 1815?

Como vimos na questão anterior, se em determinado ano uma data cai em certo dia da semana, no ano seguinte a data avançará um dia na semana, não havendo entre elas o dia 29 de fevereiro; em caso contrário, o avanço na semana será de dois dias.

Vejamos quantas vezes o dia 29 de fevereiro aparece entre as datas que estamos a considerar.

Recordemos que o n-ésimo termo de uma progressão aritmética de razão r, em que a_1 é o primeiro elemento, vem dado por:

$$a_n = a_1 + (n–1)r.$$

Deste modo, na progressão aritmética finita $(a_1, \ldots, a_n)$ de razão $r \neq 0$, vem:

$$n = \frac{n_a - a_1}{r} + 1. \qquad (1)$$

Os anos bissextos que nos interessam formarão, com a inclusão do ano 1900, a progressão aritmética finita (1816, 1820, 1824, ..., 1900, ..., 2008, 2012), cuja razão é 4.

Para determinar o número n de termos dessa progressão, faremos, na fórmula (1) acima, $a_n = 2012$, $a_1 = 1816$ e $r = 4$.

Portanto:

$$n = \frac{2012–1816}{4} + 1 = 49 + 1 = 50.$$

Desses termos, devemos excluir o ano 1900, que não é bissexto, por ser múltiplo de 100, mas não de 400.

Assim, o dia 29 de fevereiro aparece 49 vezes entre as datas consideradas.

Temos:

$$2015–1815 = 200$$
$$200 + 49 = 249$$

Quer dizer, a questão resume-se a determinar o 249.° dia anterior a uma sexta-feira.

Como $249 = 35 \times 7 + 4$, devemos retroceder quatro dias na semana e, portanto, o Natal de 1815 caiu numa segunda-feira.

4. CALENDÁRIOS IGUAIS DE 28 EM 28 ANOS

Vamos demonstrar agora, pois iremos usá-lo logo a seguir, o teorema mencionado na secção 1: "Dados n números naturais consecutivos, um deles, e somente um, é múltiplo de n."

Seja $S = (k, k+1, k+2, \ldots, k+n–1)$ uma sucessão de n números naturais consecutivos, e sejam q e r o quociente e o resto, respetivamente, da divisão euclidiana de k por n. Podemos então escrever: $k = nq + r$, com $0 \leq r < n$.

Vemos que $k–r$ é múltiplo de n. Portanto:

- Se $r = 0$, k é o único múltiplo de n pertencente a S, pois o próximo múltiplo de n, superior a k, será $k + n$.

- Se $r > 0$, $k–r$ não pertence a S, e então $(k–r) + n$ é o único múltiplo de n pertencente a S, pois o múltiplo seguinte, superior a este, será $(k–r) + 2n$ e, portanto, não pertence a S. Convém observar que o teorema e a demonstração continuam válidos, quando substituímos os n naturais consecutivos por n inteiros consecutivos. A referência bibliográfica [4] oferece uma elegante abordagem do tema.

Voltemos agora aos calendários. No cômputo gregoriano do tempo (que aqui usamos e é de uso universal), os calendários anuais são exatamente iguais de 28 em 28 anos, caso não ocorra, no período que se considera, um ano pseudobissexto. Noutras palavras, os anos X e $X + 28$ terão calendários iguais, caso não haja um ano pseudobissexto em $(X, X+1, \ldots, X+28)$. Isso não é difícil de entender.

Consideremos uma sucessão de 28 anos consecutivos:

$$(X, X+1, X+2, \ldots, X+26, X+27).$$

Decorre do teorema acima demonstrado que esta sucessão apresenta sete múltiplos de 4, ou seja, sete anos bissextos.

Portanto, para determinar quantos dias na semana avançará o dia 1.° de janeiro do ano $X + 28$, em relação ao dia 1.° de janeiro do ano X, bastará calcular o resto da divisão euclidiana de $35 (= 28 + 7)$ por 7. Como esse resto é 0, podemos concluir que não haverá nenhum avanço. Ou seja, o ano X e o ano $X + 28$ iniciam-se no mesmo dia da semana.

Além disso, se X é um ano comum, $X + 28$ também o será; se X é um ano bissexto, $X + 28$ também o será, pois X e $X + 28$ deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por 4.

Podemos então concluir que os anos X e $X + 28$ têm calendários iguais.

Isso não significa, entretanto, que após o ano X, o próximo ano com calendário igual ao de X será, necessariamente, o ano $X + 28$. Os anos 2009 e 2015, por exemplo, apresentam calendários absolutamente iguais. Todavia, os calendários dos anos X e $X + n$ podem ser diferentes para todo o n, sendo $0 < n < 28$. Por exemplo, o primeiro ano posterior a 2000, com o calendário igual ao desse ano, é 2028.

Portanto, o menor valor de n, diferente de zero, que garante a igualdade dos calendários dos anos X e $X + n$ é 28. Aqui, mais uma vez, supomos a inexistência de um ano pseudobissexto na sucessão $(X, X+1, X+2, \ldots, X+28)$.

Convém observar que é o facto de os calendários se repetirem de 28 em 28 anos que permite a construção dos chamados "calendários permanentes", muito comuns nas agendas anuais comercializadas.

Caso haja algum ano pseudobissexto em (X, X + 1, X + 2, ..., X + 28), os anos X e X + 28 terão calendários diferentes.

Com efeito:

- Se X + 28 for pseudobissexto, então X será bissexto e, portanto, terão calendários distintos.

- Se houver um ano pseudobissexto em (X, X + 1, X + 2, ..., X + 27), esta sucessão apresentará então seis anos bissextos e, portanto, o dia 1.° de janeiro do ano X + 28 avançará seis dias na semana em relação ao dia 1.° de janeiro do ano X, pois 28 + 6 = 34 e 34 = 4 x 7 + 6.

Assim, X e X + 28 terão calendários diferentes.

5. SEXTA- FEIRA, DIA 13

Veremos agora que qualquer ano, seja comum ou seja bissexto, tem, no mínimo, uma sexta-feira, dia 13, e, no máximo, três.

Observemos, inicialmente, que quando um mês tem 30 dias, o dia 13 avançará, no mês seguinte, dois dias na semana; quando o mês tem 31 dias, o avanço será de três dias; quando o mês tem 28 dias, o dia 13 cairá, no mês seguinte, no mesmo dia da semana. Finalmente, se o mês tiver 29 dias (fevereiro em ano bissexto), o avanço na semana será de um dia.

Representemos a sucessão dos dias da semana referentes aos sete primeiros dias de um ano qualquer por A, B, C, D, E, F, G. Não é difícil concluir que uma dessas letras, e apenas uma, indica a sexta-feira, pois sete dias consecutivos quaisquer caem sempre nos sete diferentes dias da semana, o que é muito fácil constatar.

Observemos que 13 de janeiro terá F como dia da semana. Podemos, portanto, formar a seguinte tabela representativa do dia da semana em que o dia 13 cai em cada mês do ano arbitrário considerado:

	Ano Comum	Ano Bissexto
JAN	F	F
FEV	B	B
MAR	B	C
ABR	E	F
MAI	G	A
JUN	C	D
JUL	E	F
AGO	A	B
SET	D	E
OUT	F	G
NOV	B	C
DEZ	D	E

Facilmente constatamos que em ambas as linhas dos dias da semana cada letra ocorre, pelo menos, uma vez, e, no máximo, três. Isso mostra que qualquer ano tem, no mínimo, uma sexta-feira, dia 13, e, no máximo, três.

Como o ano pode começar por qualquer dia da semana, o que não é difícil verificar, podemos então afirmar, tendo em vista a nossa tabela, que existem, efetivamente, anos com uma única sexta-feira (dia 13), assim como também existem com duas e com três.

Considerando-se a tabela e o que foi dito logo no início desta secção, podemos concluir que quando ocorrem sextas-feiras, dia 13, em dois meses consecutivos, estes são, necessariamente, fevereiro e março de um ano comum.

Quando um ano apresenta três sextas-feiras, dia 13, essas ocorrem, como é possível perceber pela tabela, nos meses de fevereiro, março e novembro, em ano comum, ou em janeiro, abril e julho, em ano bissexto.

6. PALAVRINHAS FINAIS

Creio que o leitor concordará que a maior parte deste texto ficaria sem sentido caso os anos tivessem 364 dias. Realmente, como 364 = 52 x 7, a cada ano as datas cairiam sempre no mesmo dia da semana e, assim, um único calendário serviria para todos os anos.

Esse aspeto vantajoso de um ano com 364 dias tem despertado, há décadas, o interesse de muitos estudiosos do tema calendário. A ONU tem recebido, desde a sua criação, diversas propostas para implantar um novo calendário, de âmbito universal, com anos de 364 dias. Aliás, o tema já era discutido na Liga das Nações, que precedeu a ONU, conforme assegura o ilustre historiador brasileiro Hernâni Donato (1922 – 2012), na sua breve, mas erudita, História do Calendário.

A mais notória das propostas de reforma do atual calendário é a que propõe a criação do chamado Calendário Universal, cujas principais características são:

- Anos de 364 dias, iniciados sempre num domingo. Um calendário perpétuo, portanto.
- Trimestres e semestres de igual duração.

Isso será obtido dando-se 31 dias ao primeiro mês de cada trimestre e 30 dias aos dois seguintes. Assim, o ano terá quatro meses de 31 dias, e oito meses de 30 dias.

- A harmonia que o calendário deverá manter em relação ao ano solar estará assegurada pelo acréscimo de um dia ao quarto trimestre. Será um dia livre, não pertencendo a nenhuma semana e a nenhum mês. Embora ocorra a seguir a um sábado, esse dia especial não será um domingo, e sim um Dia Mundial.

- Um outro dia, também não pertencente a uma semana, será acrescentado ao mês de junho dos anos bissextos. Será o Dia Bissexto.

Como podemos notar, os anos desse novo calendário proposto têm, na verdade, exatamente a mesma duração dos anos do nosso calendário gregoriano.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Domingues, Hygino Hugueros. *Fundamentos de Aritmética*, Florianópolis, Editora da UFSC, 2009.

[2] Donato, Hernâni. *História do Calendário* (2.ª edição), São Paulo, Edições Melhoramentos, 1978.

[3] Duncan, David Ewing. *Calendário – A epopeia da humanidade para determinar um ano verdadeiro e exato*, Rio de Janeiro, Ediouro, 1999.

[4] Muniz Neto, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 5 – Teoria dos Números*, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

SOBRE O AUTOR

Paulo Sérgio Argolo é professor de Matemática (aposentado) da rede estadual do Rio de Janeiro (Brasil). Nasceu e vive na Cidade Maravilhosa.