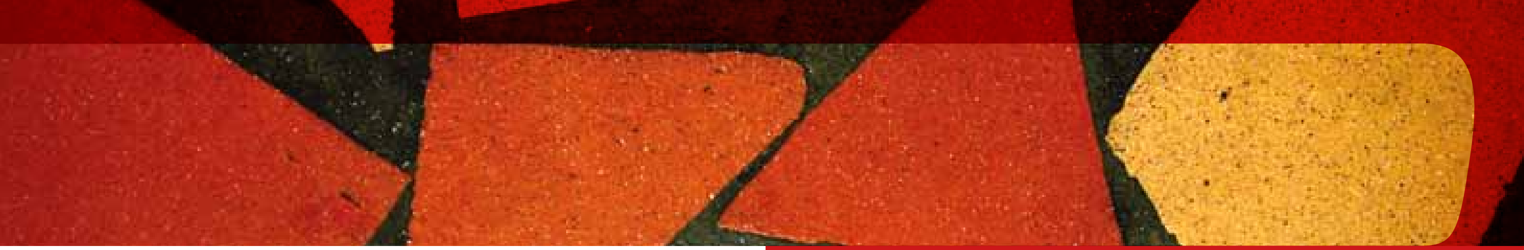

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

A MELHOR MANEIRA DE EMPILHAR LARANJAS

No ano passado, um jornalista de Plymouth, Nova Zelândia, decidiu levar o 18º. problema de Hilbert para a rua. Parte do problema pode formular-se assim: Há alguma maneira melhor de empilhar laranjas do que as pirâmides que se encontram no lugar da fruta? Em pirâmides, as laranjas ocupam pouco mais de 74% do espaço. Será possível fazer melhor com outro arranjo? Os merceeiros de Plymouth não ficaram impressionados. "O meu pai ensinou-me a empilhar laranjas quando eu tinha cerca de quatro anos", disse um merceeiro chamado Allen. Depois de ter sido informado de que os matemáticos resolveram o problema após 400 anos, perguntámos a Allen se tinha sido difícil para ele encontrar o melhor arranjo. "Põe-se simplesmente uma em cima das outras", disse. "Levou para aí dois segundos."

Thomas Hales, *Cannonballs and Honeycombs.*

Este é um problema que se ajusta perfeitamente ao título desta coluna: a sua formulação é simples, e a resposta, sendo simples também, é surpreendentemente difícil de demonstrar. Falamos do problema do empacotamento de esferas, que pode ser formulado, de modo informal, da seguinte maneira: qual é a melhor maneira de empilhar laranjas? Julgo que todos os leitores, bem como todos os merceeiros, saberão a resposta. Mas saberão a demonstração?

A história deste problema remonta ao século XVII, a um pedido de Sir Walter Raleigh ao seu assistente Thomas Harriot: Raleigh queria saber quantas bolas de canhão caberiam numa pilha habitual. Harriot, depois de resolver o problema, correspondeu-se com Kepler, que veio a formular o problema do empilhamento mais económico no seu ensaio *On the six-cornered snowflake*, de 1611, no qual fala também de arranjos planares como o dos favos de mel. Por causa deste texto, o resultado ficou conhecido como a conjetura de Kepler.

Antes de avançarmos na história, vamos formalizar um pouco o enunciado. Pensando para já em duas dimensões, podemos perguntar-nos qual é a melhor maneira de organizar círculos, de igual raio, num plano. Apresentamos dois arranjos, supondo que o padrão se mantém infinitamente (ver figuras 1 e 2).

O conceito matemático que permite afirmar que o primeiro arranjo é melhor do que o segundo é a *densidade,* que é o quociente entre a área ocupada pelos círculos e a área total. Nestes dois casos a densidade coincide com o quociente entre a área do círculo e a área do polígono envolvente, hexágono ou quadrado. Os valores são, respetivamente,

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0{,}9069, \qquad \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

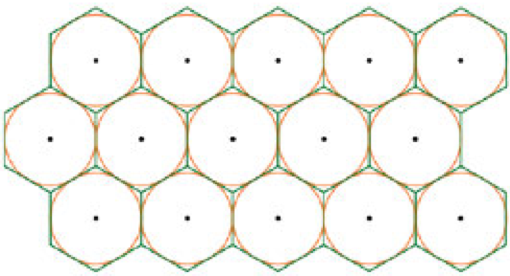

Figura 1: Circunferências em hexágonos.

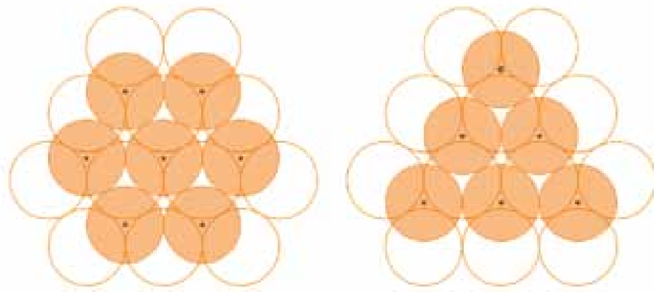

Figura 3: Dois níveis de esferas.

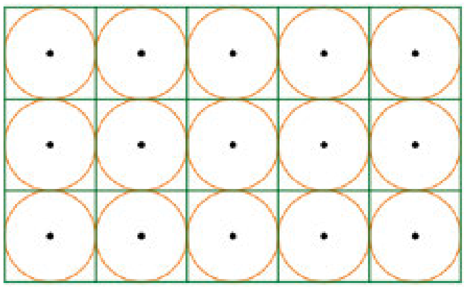

Figura 2: Circunferências em quadrados

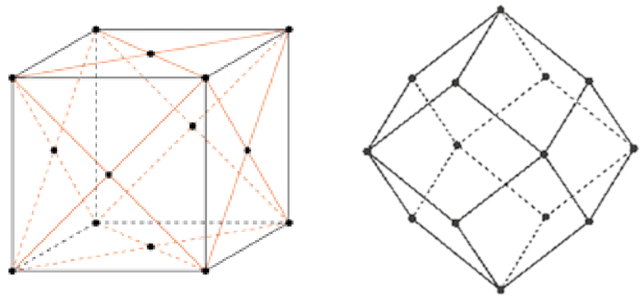

Figura 4: Disposição cúbica de faces centradas
e dodecaedro rômbico

Assim, o primeiro arranjo é mais denso, o que faz dele uma melhor opção. Thue apresentou em 1892 uma breve demonstração, e outra em 1910, de que esta era a maior densidade possível. Ambas as demonstrações foram entretanto postas em causa, e outra demonstração foi apresentada por L. Tóth em 1940.

Os hexágonos e os quadrados têm também um papel importante: são as chamadas células de Voronoi determinadas pelos centros dos círculos. A célula que inclui um dado centro C é o conjunto dos pontos que está mais próximo desse centro do que de qualquer outro. Se desenharmos os segmentos que unem os centros, as fronteiras das células de Voronoi estão contidas nas mediatrizes desses segmentos.

Em três dimensões, o modo mais intuitivo de dispor esferas é o seguinte: num primeiro plano, colocar as esferas como os círculos no primeiro arranjo, e, num plano superior, colocar as esferas nas pequenas covas formadas por três esferas. Há duas formas de o fazer, descritas na figura 3 (as esferas a cheio são as do segundo nível).

Para o terceiro nível poderíamos usar qualquer destas opções de novo, originando várias disposições, todas com densidade $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}7405$. Uma destas disposições é a chamada *cúbica de faces centradas* (um nome usado na cristalografia), em que os centros das esferas se dispõem como na figura 4.

Neste caso, as células de Voronoi são dodecaedros rômbicos, polígonos com 12 faces, que são losangos congruentes. Pensando que uma das esferas está inscrita no polígono, as faces indicam as posições das 12 esferas que tocam nessa esfera central (tal como no caso de dimensão 2). Também aqui o volume da esfera dividido pelo volume do dodecaedro é igual à densidade. Podemos agora enunciar o resultado.

Conjetura de Kepler. *Uma disposição de esferas, com o mesmo raio, no espaço, não pode ter densidade superior a* $\pi/\sqrt{18}$*, que é a densidade da disposição cúbica de faces centradas.*

Um dos primeiros avanços foi feito por Gauss, em 1831, quando provou que a conjetura de Kepler é verdadeira, se considerarmos apenas arranjos periódicos de bolas no espaço. A demonstração não é muito intrincada, mas é teoricamente significativa: o problema a partir de agora era o de majorar a densidade em disposições não periódicas.

Em 1900, Hilbert incluiu a conjetura na sua famosa lista de 23 problemas, apresentada no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris – a conjetura aparece na segunda parte do problema 18.

Mais de meio século depois, em 1953, László Fejes Tóth mostrou que o problema de determinar um majorante para a densidade podia ser reduzido a um número finito de cálculos – finito, mas muito grande. Este resultado baseava-se na observação de que num arranjo optimal apenas um número finito de tipos de células de Voronoi pode aparecer.

A situação faz lembrar a do problema das quatro cores, e parecia apelar também a uma solução computacional, mas mesmo com o uso de máquinas (dos anos 50 ou mesmo mais recentes), a quantidade de cálculos era incomportável.

Quarenta anos mais tarde, em 1993, Wu-Yi Hsiang apresentou uma demonstração da conjetura no *International Journal of Mathematics*, usando essencialmente trigonometria esférica. Rapidamente surgiram algumas críticas: Thomas Hales (ele próprio a trabalhar já no problema) publicou um artigo no *Mathematical Intelligencer* pondo em questão as demonstrações dos resultados principais, ao qual Hsiang respondeu com um artigo na mesma revista. Ainda hoje se considera que a demonstração de Hsiang não é completamente aceitável.

Justamente por essa altura, Thomas Hales tentava uma aproximação computacional, como sugerido pelo resultado de László Tóth. Em 1992, em colaboração com o seu estudante de doutoramento Samuel Ferguson, iniciou um projeto de aplicação de técnicas computacionais para resolver o problema, que envolvia o estudo numérico de cerca de 100.000 problemas de programação linear. O resultado foi atingido em 1998: Hales anunciou que o projeto estava terminado, estando contido em 250 páginas de texto e três gigabytes de programas e dados computacionais.

Naturalmente, dada a extensão da demonstração, e depois do que se tinha passado com Hsiang, as revistas científicas estavam cautelosas. O *Annals of Mathematics* designou um júri de 12 *referees* para analisarem a demonstração, liderado por Gábor Tóth (filho de László). Depois de quatro anos de análise do trabalho de Hales, o relatório do editor Robert MacPherson afirmava:

> "Os *referees* gastaram muita energia neste estudo. Organizaram um seminário durante muito tempo. Verificaram várias afirmações particulares na demonstração, e todas estavam corretas. [...] Não conseguiram porém garantir a correção da demonstração e não conseguirão fazê-lo por já não terem energia para dedicar ao problema."

Depois de um pedido de revisão, o artigo de 121 páginas foi publicado em 2005 nessa prestigiada revista[1], remetendo os detalhes para dez artigos publicados na edição de julho de 2006 da revista *Discrete and Computational Geometry*.

Hales, porém, entendeu que era necessário apresentar uma demonstração mais convincente. Além de publicar vários artigos de divulgação, iniciou então o projeto *Flyspeck* (a partir das iniciais F, P e K, que significam *Formal Proof of Kepler*). O objetivo era produzir uma demonstração formal que pudesse ser verificada por computador, eliminando assim as dúvidas sobre a sua validade. O projeto, que envolveu um intenso trabalho de equipa, com participantes de vários países, foi dado como terminado a 16 de agosto de 2014.

Esta história acaba, assim, por ser mais do que a do próprio teorema, chegando mesmo ao conceito de demonstração matemática, e aos métodos aceitáveis para verificar a sua validade. Terminamos com uma citação de Hilbert a este respeito.

> "É necessário estudar a natureza genuína da demonstração matemática, por forma a clarificar questões como a decidibilidade por meio de um número finito de operações."

REFERÊNCIAS

[1] Thomas C. Hales, "Canonballs and honeycombs", *Notices Amer. Math. Soc.* 47 (2000), n.º 4, 440–449.

[2] Thomas C. Hales, "A proof of the Kepler conjecture", *Ann. of Math.* (2) 162 (2005), n.º 3, 1065–1185.

[3] Projeto *Flyspeck*, *http://code.google.com/p/flyspeck/*.

[1] O artigo esteve para ser publicado com o aviso "Os *Annals* não podem garantir que este artigo esteja correto. De qualquer forma, achamos que o artigo é relevante" (o que teria sido espantoso para uma revista como os *Annals*). Isso acabou por não acontecer.