MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1961.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5491 — Dividindo dois números naturais pelo seu máximo divisor comum obtém-se os quocientes 8 e 15. Determinar os dois números, sabendo que a soma do seu máximo divisor comum com o seu menor múltiplo comum é 726.

R: *Sejam* m *e* d *o menor múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois inteiros* a *e* b. *Tem-se, como se sabe,* $a=d\cdot p_1$, $b=d\cdot p_2$ *e* $m\,d=a\,b$, *onde* p_1 *e* p_2 *são primos entre si. Daqui resulta, em vista dos dados do problema, que* $a=d\cdot 8$, $b=d\cdot 15$ *e* $m+d=\dfrac{a\,b}{d}+d=726$, *e portanto* $d\cdot 8\cdot 15+d=726$ *e* $d=6$. *Deste modo será* $a=6\cdot 8=48$ *e* $b=6\cdot 15=90$.

ÁLGEBRA

I

5492 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$16\,x^4-4\,m\,x^2+m-1=0$$

estejam em progressão aritmética.

R. *Prova-se que, para que as raízes da equação biquadrada estejam em progressão aritmética é necessário e suficiente que* $9\,p^2-100\,q=0$, *se* p *e* q *forem a soma e o produto das raízes da resolvente da equação biquadrada. Neste caso teremos* $p=m/4$ *e* $q=(m-1)/16$, *de modo que será* $9\,m^2-100\,(m-1)=0$ *e portanto* $m=50$ *ou* $m=10$.

II

5493 — Derivar a função $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ e simplificar o resultado.

R: $y'=\left[\sqrt{1+x^3}-x\cdot 3\,x^2\cdot 1/2\cdot(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\right]:$
$:(1+x^3)=(2-x^3):\left(2\sqrt{(1+x^3)^3}\right)$

TRIGONOMETRIA

I

5494 — Resolver a equação $\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x+\cos x=2$.

R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x+\dfrac{1}{2}\cos x=1$ *e como* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$ *e* $sen\,30^\circ=\dfrac{1}{2}$ *vem:* $sen\,x\cos 30^\circ+\cos x\,sen\,30^\circ=1$ *ou* $sen\,(x+30^\circ)=sen\,90^\circ$. *Tem-se então* $x+30^\circ=k\cdot 180+(-1)^k\cdot 90^\circ$ *ou* $x=k\cdot 180^\circ-30^\circ+(-1)^k\cdot 90^\circ$

II

5495 — Derivar a função $y=\dfrac{\cos\left(a+\sqrt{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(a-\sqrt{x}\right)}$ e simplificar o resultado.

R: $$y'=\left[-sen\left(a+\sqrt{x}\right)sen\left(a-\sqrt{x}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(a-\sqrt{x}\right)\cos\left(a+\sqrt{x}\right)\right]:sen^2\left(a-\sqrt{x}\right)=$$
$$-\left[\cos\left(a+\sqrt{x}-a+\sqrt{x}\right)\right]:sen^2\left(a-\sqrt{x}\right)=$$
$$=\left(-\cos 2\sqrt{x}\right):sen^2\left(a-\sqrt{x}\right)$$

GEOMETRIA

5496 — Determinar o ângulo da recta $y=3\,x-2$ com a recta que passa pelos pontos $(2,-1)$ e $(0,-2)$.

R: *A equação da recta que passa pelos dois pontos é* $(y+1):(-1+2)=(x-2):(2-0)$ *ou seja* $y=\dfrac{1}{2}x-2$. *A fórmula que dá a tangente do ângulo de duas rectas com os declives* m *e* m' *é* $tg\,\theta=\dfrac{m-m'}{1+m\,m'}$.