$$20y = (y-5)^2 - 100 = 0$$
$$20y = y^2 - 10y + 25 - 100 = 0$$
$$y^2 + 10y - 75 = 0 \quad y = -15 \quad y = 5$$

Rejeitada a solução $y = -15$, *vem* $x^2 = 100$ $x = \pm 10$.

Os pontos da intersecção são $(10,5)$ *e* $(-10,5)$.

5316 — Dada a equação

$$(x+2)^2 + y^2 = 32$$

ache pelas derivadas a equação das tangentes à curva e, estabelecendo a condição de elas fazerem 45° com o eixo dos xx, encontre os pontos de tangência.

O que entende por derivada de uma função?

R: *Nota: a determinação de tangentes pelas derivadas está fora do programa do curso complementar dos Liceus. Embora se pense que assim não devesse ser, não podemos deixar de fazer notar que é muito frequente aparecerem questões como esta nos exames de aptidão, tanto escritos como orais, o que não nos parece justo.*

$$y^2 = 32 - (x+2)^2$$
$$y' = \frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}}.$$

Num ponto (x, y) *da curva, a tangente tem por equação* $Y - y = m(X - x)$, *em que* m *é o valor da derivada da função* $y(x)$ *no ponto* x.

Se as tangentes fazem com o eixo dos $\overline{xx}$ *ângulos de* 45°, *será* $m = 1$.

$\dfrac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$. *Como a equação da curva é* $y^2 = 32 - (x+2)^2$, *associando esta equação à relação* $\dfrac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$, *obtém-se:*

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{32-(x+2)^2} = 1 \\ y^2 = 32-(x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ y^2 = 32 - (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}.$$

As tangentes que fazem com $\overline{ox}$ *angulos de 45° tocam a circunferência nos pontos* $(-6, 4)$ *e* $(-6, -4)$.

Derivada de uma função $f(x)$ *num ponto* x_0 *é o limite, se existe, da razão incremental, de* $f(x)$ *em* x_0 *quando* x *tende para* x_0.

ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Estágio pedagógico de 8.° Grupo — Exames de Cultura (1959-60) — Decreto n.° 41273 de 17-9-1957.

Prova escrita

5317 — Faça uma «exposição» subordinada ao tema:

Números complexos a duas unidades

OBS: — O trabalho admite a orientação e a extensão que entender dever dar-lhe, mas, de preferência, considere as rubricas seguintes:

I

1. *Os números complexos:* — definição; relação de igualdade.
2. *As operações de adição e multiplicação:* — definição e propriedades formais; existência de operações inversas daquelas.
3. *Propriedades fundamentais do conjunto dos números complexos.*

II

4. A operação de *potenciação* (expoente inteiro e expoente fracionário).
5 A operação de *radiciação;* análise circunstanciada da operação e possível estudo comparativo com a mesma operação, quando definida no conjunto dos números reais.

Prova prática

I. GEOMETRIA

5318 — Num triângulo ABC, de centro de gravidade G, as medidas a, b e c dos lados verificam a relação

$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

1.°) Prove que são tangentes ao lado BC as duas circunferências que passam, respectivamente, pelos pontos A, B e G (uma delas) e pelos pontos A, C e G (a outra).

2.°) Prove que as medidas m_a, m_b e m_c das *medianas*, saídas, respectivamente, dos vértices A, B