ANO XVIII—N.º 68-69 GAZETA DE MATEMÁTICA SET./DEZ. — 1957

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Aspectos da actualidade Matemática

por **A. Pereira Gomes** *

Como seria de esperar, vou falar-vos de Matemática, ou mais precisamente (pois não quero despertar apreensões) «àcerca de Matemática».

A minha exposição terá, portanto, um carácter meramente descritivo, limitando-se a considerações muito gerais, onde procurarei delinear alguns aspectos actuais da Matemática — cujos traços principais são, em suma, um subido grau de abstracção, o apoio sistemático na teoria dos conjuntos, ou pelo menos no que se convencionou chamar «a teoria ingénua dos conjuntos», a axiomatização de diferentes teorias, a unificação numa só teoria de diferentes disciplinas até à pouco divorciadas umas das outras, etc.

Estas novas feições que nos mostra a Matemática de hoje levam, também, forçosamente a encarar a questão primordial do ensino desta ciência. Primordial, digo, e não vai aqui abuso de linguagem. Há quem afirme, e é muito plausível, que o embrião do conhecimento científico surgiu precisamente do desejo ou necessidade de conservar o fruto de experiências acumuladas por uma geração e transmiti-las às gerações futuras como a melhor das heranças.

A questão do ensino é portanto inerente à existência da própria ciência. É por ele que a ciência se perpetua. Por via dele a ciência se renova e se mantém (ou não) um organismo vivo e operante.

Pelo que toca à Matemática, não será demais realçar a importância desta questão. A Matemática é uma velha ciência feita por jovens e seria fácil confirmá-lo com exemplos numerosos, menos conhecidos do que os de GALOIS, ABEL ou CAUCHY.

Já alguém afirmou que as grandes ideias renovadoras da Matemática foram criações de menores de 30 anos. A asserção não será estrictamente rigorosa, mas o essencial dela permanece.

Tanto basta para dar relêvo à questão do ensino desta Ciência. Há necessidade não só de transmitir à juventude sólidos conhecimentos, mas simultâneamente imbuí-la dos métodos modernos, levá-la ao limiar dos verdadeiros problemas, impregná-la de espírito científico, incutir-lhe o gosto pela ciência — de par com uma compreensão lúcida do papel que a esta cabe na vida dos homens de hoje.

Ao ensino da Ciência e, em particular, da Matemática, cabe assim uma dupla função: a de exercer uma acção informativa, tecnoló-

* A Redacção apresenta aos Leitores da Gazeta a presente conferência que constituiu a Aula Inaugural do ano escolar de 1957 na Universidade do Recife.

gica e, paralelamente, numa acção formativa, educadora.

Nestes termos, torna-se patente a grave responsabilidade dos profissionais do ensino — quero dizer: professores e alunos. Com efeito, essa responsabilidade — nunca será demais sublinhá-lo — é assumida em comum, quaisquer que sejam as tentativas (sempre pueris) de separar professores e alunos em classes opostas, quando não hostis. Do ponto de vista em que nos colocamos, professores e alunos estão empenhados, e são intrìnsecamente solidários, na execução duma tarefa que transcende, pelos seus resultados e consequências, pela sua projecção social, os simples interesses pessoais e até o âmbito duma geração.

Não pretendo deter-me, neste momento, na análise de problema tão delicado e de repercussões tão profundas como é o de adaptar globalmente o ensino universitário às necessidades do tempo presente. Tanto mais que um tal programa interfere no ensino secundário e até primário, enquadrando-se, necessàriamente, por conseguinte, em toda uma política educacional.

Quero tão sòmente não esquecer de o mencionar, como numa condição essencial ao progresso técnico-científico duma nação. E sublinhar, a propósito, que não é só com respeito às ciências naturais ou experimentais que tal questão se apresenta — o que é correntemente aceite — mas igualmente com respeito à Matemática. Como aquelas, a Matemática evolui, renova os seus problemas, os seus métodos, a sua linguagem. Muda de feições, muda de roupagens. E torna-se indispensável que o ensino da Matemática leve isso em conta. Não se trata, como é óbvio, de preparar cada aluno duma escola superior para se lançar na pesquisa científica. Mas seria desejável que a atitude de cada estudante, como de cada professor, fosse a de um estudioso — vale dizer, de um pesquisador. Uma atitude activa e não estática ou passiva, crítica e não meramente receptiva, curiosa, indagadora, vigilante e não burocratizada na preparação ou execução de exames para a conquista, sem glória e sem gosto, dum almejado «Abre-te Sézamo!» de papel selado.

O problema, como disse, é delicado, complexo, e é também de extensão geográfica universal. Ele apresenta, além disso, o desagradável inconveniente de não poder resolver-se matemàticamente... Deixemo-lo pois entregue a outros cuidados.

*

* *

Muitos bons espíritos nos têm deixado, através da história do pensamento, diversas expressões definidoras da Matemática, sentenças brilhantes ou atraentes mas que, no melhor dos casos, fixam apenas uma face desta ciência.

Para ARISTOTELES, a Matemática é o estudo da quantidade, para BACON ela é o estudo que torna os homens subtis, para DESCARTES a Matemática é a ciência da ordem e da medida, para KLEIN é a ciência das coisas evidentes, para WHITEHEAD a Matemática é «o desenvolvimento de todos os tipos de raciocínio formal, necessário e dedutivo» ou, para RUSSELL, «o assunto no qual nunca se sabe do que se está a falar, nem se o que se diz é verdadeiro».

«O que é a Matemática?» é o título sugestivo dum excelente livro de divulgação, que nos seus diferentes capítulos proporciona ao leitor um convívio ameno com alguns problemas básicos, conceitos e métodos matemáticos, clássicos e modernos.

Em guisa de resposta àquela pergunta excitante que encabeça o livro, os autores concluem o seu prefácio com a observação sibilina de que «apenas uma experiência activa com a matemática pode responder a tal questão.»

Há que reconhecer que esta observação é cheia de sabedoria.

Por outro lado, para sermos precisos, a questão «o que é a Matemática?» deverá situar-se hitòricamente. Como qualquer outra ciência, ou ramo de saber, ou produto de elaboração intelectual, a Matemática «vive», isto é, da sua fase rudimentar, larvar, incipiente, tem passado, através da história da civilização, por fases diversas, ora brilhantes ora apagadas, mas sempre «changeante», comportando a sua parcela de contingente, condicionada como toda obra de pensamento pelas circunstâncias históricas, crescendo, desenvolvendo-se, aperfeiçoando-se impulsionada quer por móbeis técnicos, pela pressão de questões oriundas de outras ciências — e entrelaçando-se não raro com elas — quer em busca de equilíbrio interior, de fundamentação sólida, criticando os seus princípios e métodos, de par com uma especulação de carácter filosófico.

Para ser preciso, portanto, essa questão deveria fraccionar-se: o que foi a matemática dos egípcios, dos babilónios, dos gregos, dos árabes, da renascença, etc.. O que é a Matemática de hoje? Quanto à Matemática do futuro apenas se poderá afirmar uma serena confiança no seu desenvolvimento e progresso, que não é senão a confiança na capacidade criadora do espírito do Homem, o qual continuará forjando os meios para uma compreensão mais profunda, ampla e precisa do mundo em que vive, uma mais eficaz intervenção e recreação desse mundo.

O carácter abstracto, formalista que as teorias modernas da Matemática apresentam em tão alto grau, não está em contradição com este papel ou com as razões motoras do seu desenvolvimento que esquemàticamente lhe estou atribuindo. É, a meu ver, ainda a preocupação de encontrar soluções justas para problemas formulados correctamente que leva o espírito à busca do rigor, à crítica dos fundamentos, à formulação precisa dos princípios, dos conceitos e das regras de construção.

Parece-me, contudo, não ser desprovida de interesse a análise de algumas daquelas definições lapidares a que me referi há pouco e seja-me permitido considerar dentre elas a referida «boutade» de RUSSELL, impregnada dum excelente humor inglês e extremamente feliz ao sintetizar uma das características essenciais da Matemática — a de uma teoria hipotético-dedutiva.

Vale a pena integrá-la no seu contexto e sondar-lhe o sentido profundo e exacto.

RUSSELL escreveu: «A Matemática pura consiste inteiramente em afirmações do género desta: se tal proposição é verdadeira àcerca de alguma coisa, então tal e tal proposição é verdadeira àcerca dessa coisa. É essencial não discutir se a primeira proposição é realmente verdadeira e não mencionar que coisa é aquela para a qual a proposição se supôs ser verdadeira... Se a nossa hipótese é àcerca de alguma coisa e não àcerca de uma ou mais coisas particulares, então as nossas deduções constituem Matemática. Assim — conclui RUSSELL — a Matemática pode ser definida como assunto no qual nunca se sabe àcerca de que se fala, nem se o que se está dizendo é verdadeiro.

Por mais chocante que possa ser tal afirmação para o senso comum, ela traça efectivamente o que há de mais característico na ciência Matemática, o segredo da sua universalidade e da sua eficiência como suporte de outras ciências, mas também a sua feição mais familiar a todos nós, incluindo aqueles para quem a Matemática está reduzida aos seus rudimentos.

Considere-se por exemplo a seguinte proposição: se um terreno tem 10 metros quadrados e vale 3 cruzeiros o metro quadrado, o terreno vale 30 cruzeiros. Ou esta outra: se cada laranja vale 3 cruzeiros, 10 laranjas valem 30 cruzeiros. Ou ainda: se um automóvel segue à velocidade de 3 quilómetros por minuto, ele percorre 30 quilómetros em 10 minutos.

Estas proposições referem-se a coisas particulares e não constituem pois Matemática pura. A proposição Matemática correspondente será: se adicionarmos 10 vezes 3 unidades obtemos 30 unidades, ou, abreviadamente, $10 \times 3 = 30$. E é manifesto que tanto podemos estar a falar de cruzeiros como de quilómetros.

A análise da segunda parte, quanto a saber «se o que se diz é verdadeiro», é um pouco mais subtil, embora à primeira vista pudesse interpretar-se como significando que o terreno pode valer ou não os 30 cruzeiros, sem que isso afecte a igualdade $10 \times 3 = 30$.

Um outro exemplo projectará nova luz sobre a asserção de RUSSELL: É bem conhecida a existência de geometrias não euclideanas que negam o célebre postulado das paralelas. KLEIN mostrou, nos fins do século passado, que o conteúdo duma tal geometria é tão aceitável quanto o da geometria euclideana. De resto é sabido que a teoria da Relatividade Generalizada adopta precisamente uma geometria não euclideana.

Então, qualquer proposição que resulte do postulado das paralelas, embora verdadeira na geometria euclideana, é falsa numa geometria não euclideana. Tudo depende, pois, de serem aceites, ou não, como verdadeiras as hipóteses de partida.

Estes exemplos elementares bastarão talvez para chamar a atenção sobre a natureza das proposições matemáticas. Por outro lado, surgem a seu respeito um certo número de questões.

Uma, é a de que a validade das afirmações matemáticas é condicionada; outra é a de saber, dentro desse condicionamento, qual o critério de verdade matemática.

Estas duas questões dizem evidentemente respeito a toda a teoria hipotético-dedutiva e logo voltaremos a elas. Mas há ainda uma terceira questão, quanto à interconexão da matemática com as ciências experimentais, o seu poder interpretativo do mundo físico, que tornam as teorias matemáticas um instrumento impulsionador do conhecimento dos fenómenos naturais e do seu controle.

Repare-se que històricamente as teorias matemáticas não aparecem geralmente como teorias lógico-dedutivas. Mas bem ao contrário, as suas origens são as mais das vezes de carácter empírico.

Assim a geometria parece ter surgido, como o seu nome indica, de problemas de mensuração de terras no velho Egipto. Também as origens do cálculo integral parece poderem situar-se na determinação, tratada por KEPLER, do volume de tonéis, sólidos limitados por superfícies curvas de geratrizes não rectilíneas, se não quisermos falar do método de exaustão de ARQUIMEDES, utilizado com finalidades análogas. E muitos outros exemplos seria fácil apontar.

Sòmente séculos após os primeiros estudos de geometria na civilização egípcia, aparece com EUCLIDES uma sistematização dos conhecimentos geométricos com carácter axiomático. Esta obra genial permaneceu como modelo de teoria dedutiva e exerceu uma vasta e profunda influência na elaboração moderna de outras teorias científicas, nomeadamente na axiomatização da Mecânica e certos ramos da Física.

No entanto a Análise, como a Aritmética, sòmente lograram uma sistematização axiomática no último quartel do século passado, quando DEDEKIND, WEIERSTRASS e outros conseguiram uma definição rigorosa do sistema de números reais. Ligada a ela, a axiomática de PEANO para os números naturais, a que se deverá acrescentar ainda o axioma de ZERMELO, pode constituir uma base axiomática de toda a Análise, e evidentemente também da Aritmética. Por essa época a Análise havia já atingido pràticamente as suas gigantescas proporções actuais.

São estes, dois exemplos bem sugestivos

A Gazeta de Matemática saúda os Leitores e Amigos, desejando-lhes Boas Festas e Novo Ano próspero e de Paz; formula ardentes votos pelo ressurgimento científico de Portugal.

duma situação que me vejo tentado a descrever da seguinte forma: não são as regras lógicas que promovem o desenvolvimento da Matemática: *são os seus problemas.* Esses problemas podem surgir internamente, duma discussão dos fundamentos lógicos, ou externamente por solicitação e sugestão das ciências experimentais.

Esta parece ser também a posição assumida, relativamente à natureza da Matemática, pelo notável cientista VON NEUMANN, recentemente falecido — quando escreve sintèticamente: «Existe uma duplicidade inteiramente peculiar à natureza da Matemática. Tem-se de conceber esta duplicidade, aceitá-la e assimilá-la ao próprio pensamento sobre a assunto. Esta dupla face é a face da Matemática e não creio que qualquer visão unitária, simplificada da coisa seja possível sem sacrificar a sua essência».

Esta posição não coincide com a de RUSSEL e outros logicistas, para quem a Matemática se reduziria a uma parte da lógica.

O grande matemático DENJOY, que recebemos na Universidade do Recife em 1954, sublinha, igualmente, numa bela frase, aquela duplicidade: «O racional, em Matemática como em outras partes — escreve ele em «L'innéité du transfini» — retempera-se periòdicamente no empírico para adquirir forças que não poderia encontrar em si mesmo».

Voltemos, porém, às duas primeiras questões suscitadas hà pouco, relativas a uma teoria hipotéctico-dedutiva. Já dissemos que a primeira teoria matemática com esta feição é a geometria de EUCLIDES. Mas há a notar que os *Elementos* de EUCLIDES não constituem uma solução satisfatória do problema de axiomatizar a Geometria.

Por um lado, as definições mais importantes são meras descrições apoiadas na intuição. Por outro, muitos axiomas não foram explìcitamente formulados. O trabalho de pesquisa duma axiomatização completa da Geometria, que se foi processando através dos tempos, recebeu um impulso vigoroso com a criação duma Geometria não euclediana, quase simultâneamente pelo húngaro BOLYAI e pelo russo LOBATSCHEWSKI, por volta de 1830. Cinquenta anos mais tarde PASCH «isolou» (para usar um termo expressivo da Bioquímica) os axiomas da ordem, até então renitentemente dissimulados. Finalmente, no fim do século XIX, HILBERT conseguiu dar forma definitiva — isto é, conforme as exigências da correcção lógica da nossa época — à axiomatização da geometria euclideana. Os seus «*Grundlagen der Geometrie*» são hoje um livro clássico nesta matéria, encontrando-se até traduzidos em língua portuguesa.

Em que consiste, então, a axiomatização duma teoria científica? Consiste em fixar um número limitado de conceitos ditos *primitivos* e de proposições básicas dessa teoria que serão chamadas *axiomas*, de modo que a estrutura dessa teoria esteja totalmente definida, quer dizer, todos os novos conceitos e proposições se possam obter por definição e por dedução lógica, respectivamente, a partir dos conceitos primitivos e dos axiomas.

«Tal é, pois, toda a arte de convencer — dizia PASCAL, no seu discurso «De l'esprit scientifique» — Ela está contida em dois princípios: definir todas as notações empregadas e provar cada coisa por substituição mental dos termos definidos pelas suas definições».

Um sistema de axiomas deve ser *consistente* ou *não-contraditório,* isto é, dele não deve ser possível inferir uma proposição e a sua negação.

Uma outra qualidade de um sistema de axiomas é a sua *independência,* que não é contudo um atributo indispensável à axiomatização duma teoria.

A questão da independência dos axiomas tem uma projecção histórica considerável, no caso da geometria euclideana. Já na antiguidade, o axioma das paralelas se não oferecia como intuitivamente evidente, o que se pode atribuir — segundo VON NEUMANN — ao facto dessa percepção intuitiva envolver de algum modo o conceito de contínuo e portanto de infinidade.

Numerosas foram as tentativas através dos séculos para o estabelecer como teorema, isto é, como consequência lógica dos restantes axiomas.

Os construtores duma geometria não euclideana puseram fim a essa questão, mostrando a independência do axioma das paralelas relativamente aos restantes, uma vez que a sua negação é consistente com eles.

A validade duma teoria dedutiva reduz-se pois à consistência dos seus axiomas. A verdade de uma proposição, numa teoria dedutiva, reduz-se à sua não contradição com as proposições deduzidas dos axiomas ou, em última análise, com os próprios axiomas.

Tal é o critério da verdade matemática.

Na realidade, o critério de verdade nas outras ciências não se afasta essencialmente dele. Se não é a não contradição lógica que intervem é, alternativamente, a não contradição entre a conceituação teórica dos fenómenos e a sua percepção experimental.

Haveria que falar ainda da *categoricidade* ou *completude* dos sistemas de axiomas. Mas creio ser agora mais atraente encarar esse assunto dum outro ponto de vista e em termos um tanto diferentes.

(Conclue no próximo número)

O ensaio χ^2 e os ensaios de concordância

por J. Tiago de Oliveira

1. Introdução. O nosso objectivo, neste artigo meramente expositório, é o de chamar a atenção para um comportamento bastante vulgarizado nas aplicações práticas da Estatística e pouco fundamentado: o uso da estatística χ^2 como indicador do ajustamento de distribuições de variáveis aleatórias (absolutamente) contínuas. Para isso começamos por expor o uso da estatística χ^2 para populações discretas.

2. A estatística χ^2 em populações discretas. O caso mais simples de aplicação da estatística χ^2 é o seguinte: as observações de uma dada população discreta podem classificar-se numa e numa só de k categorias $C_1, C_2, \cdots, C_k$ supondo-se as probabilidades de tal classificação, respectivamente, $p_1, p_2, \cdots, p_k$ $\left(\sum p_i = 1\right)$. Uma amostra de n observações revelou n_1 elementos da classe C_1, n_2 de $C_2, \cdots, n_k$ de $C_k \left(\sum n_i = n\right)$.

Pretende-se verificar se a amostra observada é compatível com a hipótese posta, a um nível de significância α, isto é, comportando o risco de se concluir erradamente que tal hipótese é falsa em $100\,\alpha\,\%$ das vezes, num grande número de provas.

O ensaio baseia-se na seguinte proposição: a distribuição assintótica da quantidade $Q^2 = \sum \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$ é a distribuição de um χ^2 com $k-1$ graus de liberdade. Se n for suficientemente grande (os $n\,p_i \geq 5$) o resultado assintótico é usado como sendo efectivamente válido para o Q^2 calculado e rejeita-se a hipótese se $Q^2 > \chi^2(\alpha, k-1)$ em que $\chi^2(\alpha, k-1)$ é o ponto α do χ^2 para $k-1$ graus de liberdade.

Esta é a regra normal de uso da estatística χ^2 nestes problemas. De facto, porém, se algumas das quantidades $n\,p_i$ não são superiores a 5, fundem-se uma ou mais catego-