dessa percepção intuitiva envolver de algum modo o conceito de contínuo e portanto de infinidade.

Numerosas foram as tentativas através dos séculos para o estabelecer como teorema, isto é, como consequência lógica dos restantes axiomas.

Os construtores duma geometria não euclideana puseram fim a essa questão, mostrando a independência do axioma das paralelas relativamente aos restantes, uma vez que a sua negação é consistente com eles.

A validade duma teoria dedutiva reduz-se pois à consistência dos seus axiomas. A verdade de uma proposição, numa teoria dedutiva, reduz-se à sua não contradição com as proposições deduzidas dos axiomas ou, em última análise, com os próprios axiomas.

Tal é o critério da verdade matemática.

Na realidade, o critério de verdade nas outras ciências não se afasta essencialmente dele. Se não é a não contradição lógica que intervem é, alternativamente, a não contradição entre a conceituação teórica dos fenómenos e a sua percepção experimental.

Haveria que falar ainda da *categoricidade* ou *completude* dos sistemas de axiomas. Mas creio ser agora mais atraente encarar esse assunto dum outro ponto de vista e em termos um tanto diferentes.

(Conclue no próximo número)

O ensaio χ^2 e os ensaios de concordância

por **J. Tiago de Oliveira**

1. Introdução. O nosso objectivo, neste artigo meramente expositório, é o de chamar a atenção para um comportamento bastante vulgarizado nas aplicações práticas da Estatística e pouco fundamentado: o uso da estatística χ^2 como indicador do ajustamento de distribuições de variáveis aleatórias (absolutamente) contínuas. Para isso começamos por expor o uso da estatística χ^2 para populações discretas.

2. A estatística χ^2 em populações discretas. O caso mais simples de aplicação da estatística χ^2 é o seguinte: as observações de uma dada população discreta podem classificar-se numa e numa só de k categorias $C_1, C_2, \cdots, C_k$ supondo-se as probabilidades de tal classificação, respectivamente, $p_1, p_2, \cdots, p_k$ $\left(\sum p_i = 1\right)$. Uma amostra de n observações revelou n_1 elementos da classe C_1, n_2 de $C_2, \cdots, n_k$ de $C_k \left(\sum n_i = n\right)$.

Pretende-se verificar se a amostra observada é compatível com a hipótese posta, a um nível de significância α, isto é, comportando o risco de se concluir erradamente que tal hipótese é falsa em $100\,\alpha\,{}^0/_0$ das vezes, num grande número de provas.

O ensaio baseia-se na seguinte proposição: a distribuição assintótica da quantidade $Q^2 = \sum \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$ é a distribuição de um χ^2 com $k-1$ graus de liberdade. Se n for suficientemente grande (os $n\,p_i \geq 5$) o resultado assintótico é usado como sendo efectivamente válido para o Q^2 calculado e rejeita-se a hipótese se $Q^2 > \chi^2(\alpha, k-1)$ em que $\chi^2(\alpha, k-1)$ é o ponto α do χ^2 para $k-1$ graus de liberdade.

Esta é a regra normal de uso da estatística χ^2 nestes problemas. De facto, porém, se algumas das quantidades $n\,p_i$ não são superiores a 5, fundem-se uma ou mais categorias obtendo-se então as categorias $C'_1, \cdots, C'_l$ com probabilidades $p'_1, \cdots, p'_l$ sendo os números observados $n'_1, \cdots, n'_l$ em que os p' e os n' são obtidos por soma dos p e dos n correspondentes. Note-se porém que, de facto, se está agora a ensaiar a nova hipótese $p'_1, \cdots, p'_l$ relativa a $C'_1, \cdots, C'_l$ e não a posta inicialmente. Todavia se houver um número nulo de observações em dada classe há, ainda, algumas modificações a fazer. Não entramos em tais detalhes que não interessam ao problema que queremos referir.

Podem ser dados exemplos de aplicação deste ensaio nos mais diversos domínios de Ciência e da Técnica desde a Engenharia à Genética, desde a Medicina à Psicologia.

De facto, vamos tratar apenas um exemplo genérico ligado à velha teoria dos jogos. Seja um conjunto de 3 baralhos iguais de cartas. Como cada baralho de cartas tem 52 cartas, eliminemos 56 cartas, ao acaso, de modo a ficar um total de 100. Pretende-se agora verificar se as probabilidades dos diversos naipes são iguais, isto é, se $p_1 = p_2 = = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$. Extraiem-se, com reposição, das 100 cartas $n = 32$ $\left(np_i = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 > 5\right)$ obtendo-se, por exemplo, $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $n_3 = 6$, $n_4 = 4$. Que conclusões se podem tirar?

De facto, tem-se $Q^2 = \sum \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} =$

$$= \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(12-8)^2}{8} + \frac{(6-8)^2}{8} + \frac{(4-8)^2}{8} =$$

$$= \frac{4+16+4+16}{8} = \frac{40}{8} = 5 .$$ Como o χ^2, relativo a $k-1 = 4-1 = 3$ graus de liberdade e para o nível de significância de $5\,\%$ ($95\,\%$ de decisões certas de aceitação se a hipótese fôr verdadeira), é $\chi^2(5\%,3) = 7{,}815 > 5$, conclui a aceitação da hipótese. A descrição completa do ensaio χ^2 pode ser vista em [4].

3. As populações contínuas. Consideremos, agora, o problema análogo para uma população contínua. Ele enunciar-se-á assim: observou-se a amostra $x_1, \cdots, x_n$ e pretende-se saber se, com base na amostra observada, se deve aceitar ou rejeitar a hipótese de que a função de distribuição é $F(x)$. Para a fixação de êrros de 1.ª e 2.ª categorias, da teoria de NEYMAN-PEARSON será, como se sabe, necessário fixar o conjunto de alternativas possíveis. O problema é complexo e incompletamente estudado. Apenas se costuma fixar o êrro de 1.ª categoria α, isto é, fixar percentagem de rejeição incorrecta de hipótese quando ela é verdadeira.

Uma primeira ideia é a de aplicar o ensaio χ^2 nos termos seguintes: divide-se a recta real por $k-1$ pontos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ de modo a obter k intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_k$ de probabilidades $p_j = F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1})$, em que se tomou, por comodidade de notação, $\alpha_0 = -\infty$ e $\alpha_k = +\infty$. Sugere-se imediatamente a questão de qual deve ser a decomposição a efectuar. Se tivessemos considerado um só intervalo, seria

$$\chi^2 = \frac{(n-n)^2}{n} = 0, \quad \text{pois é} \quad I_1 = (-\infty, +\infty)$$

$p_1 = 1$, $n_1 = n$ e para uma tal partição da recta real *qualquer hipótese seria aceitável*. De facto, porém, ninguém faria uma escolha tão desacertada.

Encontram-se, fàcilmente, exemplos de casos em que *os mesmos dados* interpretados mediante duas partições diferentes, sem sequer se ir para este caso extremo, dão lugar a conclusões diferentes.

Consideremos, para exemplo, o seguinte problema: pretende-se ensaiar a hipótese de que uma variável aleatória contínua tem uma distribuição uniforme no intervalo [0,5] de densidade 1/5, a partir de uma dada amostra de, por exemplo, 50 observações. Suponhamos que o número de observações caídas no intervalo [0,1] é $n_1 = 10$, no intervalo (1,2] é $n_2 = 10$,

$(2{,}3]$ é $n_3=20$, $(3{,}4]$ é $n_4=5$, $(4{,}5]$ é $n_5=5$ e consideremos as 2 partições seguintes: $[0{,}2)$ $[2{,}5]$ e $[0{,}3)$ $[3{,}5]$. No primeiro caso é

$$Q^2=\frac{\left(20-50\cdot\frac{2}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}+\frac{\left(30-50\cdot\frac{3}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{3}{5}}=0$$

no segundo caso é $Q^2=\dfrac{\left(40-52\cdot\frac{3}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}+$

$$+\frac{\left(10-50\cdot\frac{2}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}=\frac{25}{3}=8{,}3\cdots,$$ devendo no 2.º caso ser rejeitada a hipótese mesmo para o nível de significância de 1 °/₀ pois $\chi^2(1\,°/_\circ,1)=6{,}635$ e no 1.º caso ser aceite.

Pode pôr-se, então, o problema de se não será possível obter uma partição óptima de recta real. De facto, tal partição existe e foi estudada em [7] para certos casos.

Podia, porém, procurar-se obter uma modificação, especialmente adaptada ao caso contínuo, da estatística χ^2. Em primeiro lugar, uma sugestão: decompor a recta real em grande número de intervalos I_j com probabilidades p_j levando cada decomposição a um

$$Q^2=\sum\frac{(n_i-n\,p_i)^2}{n\,p_i}$$

cujo limite, quando o diâmetro dos intervalos tendesse para zero, se procuraria.

Ora é fácil ver que tal limite é infinito. De facto, podemos, desde início, considerar uma partição tal que cada intervalo contenha apenas uma observação, pois elas podem sempre supor-se diferentes. Se tal não suceder, a modificação do raciocínio que segue é óbvia. Os intervalos I_j que não contêm observações contribuem com $\dfrac{(-\,n\,p_i)^2}{n\,p_i}=n\,p_i$ para o Q^2, enquanto que os outros intervalos contribuem com $\dfrac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}$. O Q^2 será então

$$\begin{aligned}Q^2&=\sum_{i\neq t}n\,p_i+\sum_t\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}=n\left(1-\sum p_t\right)\\&\quad+\sum_t\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}\\&=n+\sum_t\left[\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}-n\,p_t\right]=\\&=n+\sum_t\frac{1-2\,n\,p_t}{n\,p_t}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{p_t}-n\,.\end{aligned}$$

Quando o diâmetro da partição tende para zero, $p_t\to 0$, e portanto o Q^2 cresce além de todo o limite.

De resto, tal resultado era de esperar, pois, de facto, se decompusermos o intervalo I de probabilidade p e de número de observações m, em dois intervalos I' e I'' de probabilidades p' e p'' e de número de observações m' e m'', tem-se

$$\frac{(m'-n\,p')^2}{n\,p'}+\frac{(m''-n\,p'')^2}{n\,p''}>\frac{(m-n\,p)^2}{n\,p}$$

sendo $p=p'+p''$ e $m=m'+m''$.

Tal observação sugere-nos então procurar aquela partição menos fina que contém todas as observações, isto é, efectuar a partição dada pelas próprias observações. É fácil de ver que o Q^2 relativo a tal partição tem valor médio infinito. (De resto, repare-se que já tinhamos abandonado a restrição de ser $n\,p>5$).

4. A estatística de discrepância. Resumindo os resultados anteriores, pode dizer-se que a estatística χ^2 não pode ser aplicada ao caso contínuo, nem as suas modificações mais naturais. Deve, porém, observar-se que já tinha sido introduzida, uma estatística de discrepância por K. VON-MISES e H. CRAMER definida por $\sum_j\left(F(x_j)-\dfrac{2j-1}{2n}\right)^2$, cuja distribuição assintótica fora estudada em [6].

E. J. GUMBEL em [2], porém, propôs, tendo em vista certas aplicações a problemas concretos de Engenharia, o uso de estatística, $\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$ em que x_j, como acima, representa a j^a observação contada a partir da mais pequena (x_1 será, pois, a menor observação e x_n a maior).

Era evidentemente de supor que tal estatística tivesse uma distribuição análoga à obtida por N. SMIRNOV para a estatística de R. VON-MISES e H. CRAMER. De facto, provou-se em [5] que

$$(n+1)\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$$

tem a distribuição assintótica que N. SMIRNOV tinha determinado já para

$$n\sum\left(F(x_j)-\frac{2j-1}{2n}\right)^2$$

tabelada em [1].

Pode então formular-se a seguinte regra de comportamento:

Calcula-se a quantidade

$$(n+1)\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$$

e aceita-se ou rejeita-se a hipótese $F(x)$ consoante tal quantidade é inferior ou superior a s_α, em que s_α é o ponto da distribuição de SMIRNOV correspondente ao nível de significância α.

REFERÊNCIAS

[1] T. W. ANDERSON and D. A. DARLING, *Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes.* Ann. Math. Stat., 23, 1952.

[2] E. J. GUMBEL, *Simple tests for a given hypotheses,* Biom., 32, 1942.

[3] E. J. GUMBEL, *On the reliability of the classical chi square test,* Ann. Math. Stat., 14, 1943.

[4] A. M. MOOD, *An introduction to the theory of statistics.*, Mc. Graw Hill Books Company, 1950.

[5] J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Distribution-free tests of goodness of fitting for distribution functions,* Rev. Fac. Ciênc. Lisboa, A, V, 10, 1955.

[6] N. SMIRNOV, *Sur la distribution de* ω^2, Comptes Rendus, 202, 1936.

[7] A. WALD e W. MANN, *On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test.*, Ann. Math. Stat., 12, 1942.

A criação de um satélite artificial da Terra

por ***J. Gaspar Teixeira***

No início da Era Astronáutica (1), sentimo-nos no dever de apresentar aos Leitores da Gazeta de Matemática uma exposição elementar e esquemática dos problemas de ordem matemática—essencialmente de mecânica racional—sobre os quais se fundamentam as realizações recentemente efectuadas no campo da Astronáutica. A exposição, sob a forma de artigos a publicar, constitue uma dupla homenagem:

a) de saudação aos estudantes portugueses que terão o seu futuro profissional profundamente influenciado pelos problemas consequentes,

b) de reconhecimento aos cientistas e técnicos que levaram a efeito as realizações que marcam o início da referida Era.

No presente artigo, estabelece-se a equação geral do movimento dum foguetão-propulsor considerado sob a forma mais esquemática e a trajectória mais económica em

(1) Cf. *Sciences et Avenir* — n.º 129, Nov. 1957, pág. 577.