as equações duma curva no espaço; esta curva está evidentemente no cilindro de directriz Γ, e o terceiro coseno director da tangente é K

Se $\vec{T}$ é o vector unitário sobre a tangente à hélice, e se $\vec{K}$ é o vector unitário sobre $\overrightarrow{OZ}$, será:

$$\vec{T} / \vec{K} = 0$$

Derivando em ordem a S, coordenada curvilínea sobre a hélice, temos

$$\frac{d\vec{T}}{dS} \Big/ \vec{K} = 0$$

e com as fórmulas 5) de FRENET-SERRET, vem

$$\frac{\vec{N}}{\rho} \Big/ \vec{K} = 0$$

afastando a hipótese da curva rectilínea, $\rho \neq \infty$, será: $\vec{N} / \vec{K} = 0$

Nas hélices a normal principal é perpendicular a $\overrightarrow{OZ}$ *e, inversamente*, pois o raciocínio se deixa inverter.

Derivando $\vec{N} / \vec{K} = 0$, de novo, em ordem a S, vem: $\dfrac{d\vec{N}}{dS} \Big/ \vec{K} = 0$ e com as fórmulas 5), temos:

$$\left(-\frac{\vec{B}}{\tau} - \frac{\vec{T}}{\rho} \right) \Big/ \vec{K} = 0$$

Ora, da figura, tira-se com facilidade que, $\vec{B} / \vec{K} = \pm \operatorname{sen} V$, logo

$$\mp \frac{\operatorname{sen} V}{\tau} = \pm \frac{\cos V}{\rho}$$

e finalmente

$$\frac{\tau}{\rho} = -\operatorname{tg} V$$

Nas hélices é, portanto, constante o cociente das duas curvaturas.

Inversamente: se $\tau = k\rho$, com as fórmulas de FRENET-SERRET, vem $d\vec{B} = k\, d\vec{T}$ e $\vec{B} = k \,.\, \vec{T} + \vec{k'}$ onde $\vec{k'}$ não é nulo. Multiplicando internamente por $\vec{N}$ vem: $\vec{k'} / \vec{N} = 0$ e, como já se viu, a curva é uma hélice.

Nas hélices, é constante o cociente das duas curvaturas, e inversamente.

(Continua no próximo número)

Duas fórmulas de Análise Combinatória

por *Austregésilo Gomes Spíndola*

A dedução apresentada foi-me sugerida pelo artigo *Nota a «Uma demonstração por indução finita»* do Dr. GUSTAVO DE CASTRO, Gaz. de Mat. 54, Abril de 1953, que fui encarregado, pelo Prof. M. ZALUAR, de expôr em 1956 numa das sessões do Seminário do Cálculo das Probabilidades do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

Problema

Uma urna contém n *esferas negras e* a *esferas azuis. Retiram-se simultâneamente* b *esferas. Qual a probabilidade de saída de* i *esferas azuis?*

O número N de casos igualmente possíveis é $N = \binom{n+a}{b}$ e o número F_i dos casos favoráveis ao acontecimento A_i, de que pretendemos calcular a probabilidade, é $F_i = \binom{n}{b-i}\binom{a}{i}$.

Temos então

$$p(A_i) = \frac{\binom{n}{b-i}\binom{a}{i}}{\binom{n+a}{b}}.$$

Consequências:

1) Caso $b \geq a$.

É claro que o acontecimento $A = \sum_{i=0}^{a} A_i$ é a certeza, isto é, $p(A) = 1$. Como para $i \neq j$, é $A_i A_j = 0$, podemos escrever:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{a} p(A_i) = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{a} \frac{F_i}{N} = 1 \quad \text{ou ainda}$$

$\sum_{i=0}^{a} F_i = N$, donde a fórmula da análise combinatória,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{n}{b-a} = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{n}{b-i}.$$

2) Caso $b < a$

Neste caso os acontecimentos

$$A_{b+i} \quad (i = 1, 2, \cdots, a-b)$$

são impossíveis, isto é, $p(A_{b+i}) = 0$.

Teremos então

$$\sum_{i=0}^{b} \frac{F_i}{N} = 1$$

donde

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{n}{b-i}\binom{a}{i} = \binom{n+a}{b}$$

ou, desenvolvidamente,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{a}{b},$$

fórmula bem conhecida da Análise Combinatória.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por Luís G. M. de Albuquerque

(Continuação do número anterior)

6. Sistema de vectores ortogonais e orto-normados.

Dois sistemas de vectores linearmente independentes dizem-se *equivalentes* quando geram a mesma variedade linear.

Um sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes x_n de um espaço de HILBERT é *ortogonal* quando se verifique a condição

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

O sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes e_n de um espaço de HILBERT, H, diz-se *orto-normado* quando

$$(6.\ 1) \qquad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o símbolo de KROENECKER.

TEOREMA A. *De todo o sistema de vectores linearmente independentes de* H

$$(6.\ 2) \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

é possível deduzir um sistema orto-normado de vectores, equivalente ao dado.

Demonstração Para provar o teorema basta dar o processo de construção do sistema orto-normado a partir de (6. 2), por um método devido a E. SCHMIDT (1907).

Pondo $e_1 = x_1 / \|x_1\|$, com $x_1 \neq 0$, é $\|e_1\| = 1$; seja depois $y_2 = x_2 - (x_2, e_1) e_1$, de modo que $(y_2, e_1) = 0$, e fazendo $e_2 = y_2 / \|y_2\|$, fica e_2 ortogonal com e_1 e tal que $\|e_2\| = 1$;