Consequências:

1) Caso $b \geq a$.

É claro que o acontecimento $A = \sum_{i=0}^{a} A_i$ é a certeza, isto é, $p(A) = 1$. Como para $i \neq j$, é $A_i A_j = 0$, podemos escrever:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{a} p(A_i) = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{a} \frac{F_i}{N} = 1 \quad \text{ou ainda}$$

$\sum_{i=0}^{a} F_i = N$, donde a fórmula da análise combinatória,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{n}{b-a} = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{n}{b-i}.$$

2) Caso $b < a$

Neste caso os acontecimentos

$$A_{b+i} \quad (i = 1, 2, \cdots, a-b)$$

são impossíveis, isto é, $p(A_{b+i}) = 0$.

Teremos então

$$\sum_{i=0}^{b} \frac{F_i}{N} = 1$$

donde

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{n}{b-i}\binom{a}{i} = \binom{n+a}{b}$$

ou, desenvolvidamente,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{a}{b},$$

fórmula bem conhecida da Análise Combinatória.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por *Luís G. M. de Albuquerque*

(Continuação do número anterior)

6. Sistema de vectores ortogonais e orto-normados.

Dois sistemas de vectores linearmente independentes dizem-se *equivalentes* quando geram a mesma variedade linear.

Um sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes x_n de um espaço de Hilbert é *ortogonal* quando se verifique a condição

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

O sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes e_n de um espaço de Hilbert, H, diz-se *orto-normado* quando

(6. 1) $$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kroenecker.

Teorema A. *De todo o sistema de vectores linearmente independentes de* H

(6. 2) $$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

é possível deduzir um sistema orto-normado de vectores, equivalente ao dado.

Demonstração Para provar o teorema basta dar o processo de construção do sistema orto-normado a partir de (6. 2), por um método devido a E. Schmidt (1907).

Pondo $e_1 = x_1 / \| x_1 \|$, com $x_1 \neq 0$, é $\| e_1 \| = 1$; seja depois $y_2 = x_2 - (x_2, e_1) e_1$, de modo que $(y_2, e_1) = 0$, e fazendo $e_2 = y_2 / \| y_2 \|$, fica e_2 ortogonal com e_1 e tal que $\| e_2 \| = 1$;

procedendo sempre de igual modo, obtém-se:

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}, e_i)\, e_i ,$$

sendo y_{k+1} ortogonal com cada $e_i (i=1,2,\cdots,k)$, pois

$$(y_{k+1}, e_i) = (x_{k+1}, e_i) - \sum_{j=1}^{k} (x_{k+1}, e_j)(e_j, e_i)$$

$$= (x_{k+1}, e_i) - \sum_{j=1}^{k} (x_{k+1}, e_j)\, \delta_{ij} = 0 ;$$

e portanto, pondo

$$e_{k+1} = y_{k+1} / \| y_{k+1} \| \quad \text{é} \quad \| e_{k+1} \| = 1$$

e e_{k+1} ortogonal com cada $e_i (i=1,2,\cdots,k)$.

Este processo conduz, como se desejava, a um sistema de vectores $e_1, e_2, \cdots, e_k, \cdots$, que é orto-normado, pois verifica (6. 1), e além disso equivalente ao sistema dado, pois

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}\, x_1 \\ e_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \\ &\cdots \\ e_n &= a_{n\,1}\, x_1 + a_{n\,2}\, x_2 + \cdots + a_{n\,n}\, x_n \\ &\cdots \end{aligned}$$

com $a_{11} = 1/\| x_1 \| \neq 0$, $a_{kk} = 1/\| y_k \| \neq 0$ $(k = 2, \cdots, n, \cdots)$.

Teorema B. *Num espaço de* Hilbert *separável, todo o sistema orto-normado é finito ou numerável.*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert, separável, e $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ um sistema orto-normado de vectores de H, isto é, tais que $(e_\alpha, e_{\alpha'})=0$ ou 1 consoante se tem $\alpha \neq \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$; e $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ o conjunto numerável de vectores $x_k \in H$ que é denso em H. Vamos mostrar que entre os conjuntos $\{ x_k \}_{k=1,2,\ldots}$ e $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ se pode estabelecer uma correspondência bi-unívoca. Suponhamos que a cada $e_\alpha \in \{ e_\alpha \}$ se faz corresponder um vector $x_k \in \{ x_k \}$ tal que

$$(6.\ 3) ;\quad \delta(x_k, e_\alpha) = \| x_k - e_\alpha \| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

com esta lei de correspondência fàcilmente se verifica que a dois vectores distintos e_α e $e_{\alpha'}$ de $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ correspondem dois vectores distintos x_k e $x_{k'}$ de $\{ x_k \}_{k=1,2,\ldots}$, e isso basta para que o teorema fique demonstrado; admitamos então que era $x_k = x_{k'}$; como por (6. 3) se tem

$$\| x_k - e_\alpha \| < \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \| x_k - e_{\alpha'} \| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ficaria

$$(6.\ 4) \quad \| e_\alpha - e_{\alpha'} \| \leqq \| e_\alpha - x_k \| + \| x_k - e_{\alpha'} \| < \sqrt{2} ;$$

por outro lado

$$\| e_\alpha - e_{\alpha'} \|^2 = \| e_\alpha \|^2 + \| e_{\alpha'} \|^2 = 2$$

visto ser $(e_\alpha, e_{\alpha'}) = 0$, ou seja

$$\| e_\alpha - e_{\alpha'} \| = \sqrt{2}$$

igualdade em contradição com (6. 4). Assim, não pode ser $x_k = x_{k'}$, e o teorema fica demonstrado.

Teorema C. *Se* $\{ \mathrm{e_k} \}_{\mathrm{k}=1,2,\ldots}$ *é um sistema ortogonal* (não necessàriamente orto-normado) *de vectores de um espaço de* Hilbert, *a série*

$$(6.\ 5) \qquad \mathrm{e_1} + \mathrm{e_2} + \cdots + \mathrm{e_n} + \cdots$$

e a série de termos positivos

$$(6.\ 6) \qquad \| \mathrm{e_1} \|^2 + \| \mathrm{e_2} \|^2 + \cdots + \| \mathrm{e_n} \|^2 + \cdots$$

são da mesma natureza.

Demonstração. Designemos por s_n e σ_n as somas dos n primeiros termos das séries (6. 5) e (6. 6), respectivamente. Na métrica do espaço de Hilbert considerado a primeira série será convergente desde que $\| s_n - s_m \| < \sqrt{\delta}$ ou $\| s_n - s_m \|^2 < \delta$ para $n > m > N(\delta)$; mas:

$$\| s_n - s_m \|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} e_k \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=m+1}^{n} e_k ,\ \sum_{i=m+1}^{n} e_i \right) = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{i=m+1}^{n} (e_k, e_i);$$

e como $(e_k, e_i) = 0$ para $k \neq i$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} (e_k, e_k) = \sum_{k=m+1}^{n} \|e_k\|^2 = \sigma_n - \sigma_m ;$$

esta última igualdade mostra que as séries (6. 5) e (6. 6) são da mesma natureza, como desejavamos concluir.

Finalmente,

TEOREMA D. *Os vectores de um sistema orto-normado são linearmente independentes.*

Demonstração. Se $\{e_k\}$ é um sistema orto-normado de vectores de um espaço de HILBERT, qualquer que seja n a relação

$$(6.\ 7) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$$

só pode ter a solução trivial $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$; pois se um dos α_k for diferente de zero, por exemplo $\alpha_i \neq 0$, multiplicando (6. 7) escalarmente por e_i vinha:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{ki} = \alpha_i$$

o que é impossível.

7. Aproximação linear nos espaços lineares normados.

Seja E um espaço linear normado, definido sobre um corpo $\mathfrak{k}$, e considerem-se os m vectores linearmente independentes de E

$$x_k \, (k = 1, 2, \cdots, m)$$

que geram a variedade linear $V \subset E$, constituída por vectores que se podem escrever na forma

$$(7.\ 1) \qquad x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k ,$$

com os $\alpha_k \in \mathfrak{k}$.

Sendo dado um vector $y \in E - V$ (que não é possível exprimir linearmente em função dos x_k), pode-se pôr a questão de saber qual seja, entre os vectores (7. 1) da variedade V, aquele que está à mínima distância de y, isto é, pôr o problema da determinação dos coeficientes α_k de modo que

$$(7.\ 2) \qquad \delta(x, y) = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\|$$

seja mínima. Se existir um vector x_0 nestas condições, diremos que ele é *o polinómio de melhor aproximação de* y em V (*), *ou que é a projecção de* y *na variedade* V:

$$(7.\ 3) \quad \| x_0 - y \| = \min_{\alpha_k} \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\|$$

O problema a resolver consiste, portanto, em tornar mínima a função dos parâmetros α_k:

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \right\| .$$

Notaremos, em primeiro lugar, que φ é uma função contínua dos α_k; tem-se

$$|\varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)| = \left| \left\| y - \sum_1^m \alpha'_k x_k \right\| - \left\| y - \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| \right| ;$$

e como a identidade

$$y - \sum_1^m \alpha'_k x_k = \left(y - \sum_1^m \alpha_k x_k\right) + \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k$$

(*) O vector x_0 é um polinómio em $x_k \, (k=1,2,\cdots,m)$ e coeficientes no corpo $\mathfrak{k}$; daí a designação. Conf. I. SINGER, «Propriétati ale suprafetei sferei unitate si aplicatii la resolvarea problemei unicitatii polinomului de cea mai buna aproximatie in spatii BANACH oarecare», *Studii si cercetari mat.*, Vol. 1 (1956), p. 95 ess.

dá, por aplicação de $n_3)$, § 4:

$$\left\| y - \sum_1^m \alpha'_k x_k \right\| \overline{<} \left\| y - \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| + \\ + \left\| \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k \right\|,$$

fica

$$\left| \varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \right| \overline{<} \\ \overline{<} \left\| \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k \right\| \overline{<} \sum_1^m \left| \alpha_k - \alpha'_k \right| \cdot \left\| x_k \right\|,$$

ou ainda

$$\left| \varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \right| \overline{<} \\ \overline{<} \max_k \left| \alpha_k - \alpha'_k \right| \cdot \sum_1^m \left\| x_k \right\|,$$

o que estabelece a continuidade da função φ.

De maneira análoga se mostraria que

$$\psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\|$$

é uma função contínua dos seus argumentos. Assim, na superfície esférica de equação $\sum_1^m |\alpha_k|^2 = 1$, que é um conjunto fechado e limitado de um espaço euclidiano com m dimensões, ψ admitirá um mínimo $\mu > 0$ (visto serem linearmente independentes os x_k e a relação $\sum_1^m \alpha_k x_k = 0$ não admitir senão a solução trivial).

Posto isto podemos estabelecer o seguinte

Teorema de existência. *Considerado o vector* $\mathrm{y} \in \mathrm{E}$, *não pertencente à variedade* V *de base* $\{\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_m\}$, *existe em* V *pelo menos um vector à mínima distância de* y. *Se a norma do espaço é forte, esse vector é único.*

Demonstração. Retome-se a funcão φ, não negativa, e seja $\lambda \geq 0$ o seu limite inferior; vamos mostrar que é possível determinar uma esfera S_R

$$\sum |\alpha_k|^2 = R^2$$

de raio tal que no exterior dela seja sempre

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) > 1 + \lambda.$$

Seja $R = \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\|)$, e consideremos os pontos de coordenadas $(|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_m|)$ exteriores a S_R, isto é, tais que

$$\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2} > R = \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\|).$$

Da relação

$$\left\| \sum_1^m \alpha_k x_k - y \right\| + \|y\| \geq \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\|$$

tira-se

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k - y \right\| \overline{>} \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| - \|y\| \\ \overline{>} \sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2} \cdot \left\| \sum_1 \frac{\alpha_k}{\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2}} x_k \right\| - \|y\|;$$

como se tem:

$$\sum_{k=1}^m \left| \frac{\alpha_k}{\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2}} \right|^2 = 1$$

e ψ atinge na superfície da esfera $\sum_1^m |\alpha_k|^2 = 1$ o mínimo μ, segue-se que

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \geqq \sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2} \cdot \mu - \| y \| ;$$

assim, no exterior da esfera S_R os valores de φ satisfazem à desigualdade

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) > \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\| = 1 + \lambda .$$

Deste modo, o limite inferior λ da função φ é o seu limite inferior no domínio fechado e limitado

$$\sum_1^m |\alpha_k|^2 \leqq R^2 ;$$

e como a função φ é aí contínua, segue-se que λ é um mínimo, isto é, existe pelo menos um ponto $(\alpha_1^0, \cdots, \alpha_m^0)$ onde se tem

$$\lambda = \min \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \varphi(\alpha_1^0, \cdots \alpha_m^0) =$$

$$(7.\ 4) \qquad = \left\| \sum_{k=1}^m \alpha_1^0 x_k - y \right\| ;$$

os vectores nestas condições

$$(7.\ 5) \qquad x_0 = \sum_1^m \alpha_k^0 x_k \in V$$

dão o *polinómio* de melhor aproximação de y em V, e a primeira parte do teorema fica demonstrada.

Provaremos agora que, se a norma do espaço E considerado é forte, o vector x_0 nas condições de (7. 5) é único. Suponhamos que existia em V um outro vector x' nas mesmas condições, isto é, tal que

$$\lambda = \min_{\alpha_k} \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right\| ;$$

para o vector de V com as componentes $\frac{\alpha_k^0 + \alpha'_k}{2}$ ter-se-ia: $\lambda \leqq \left\| \sum_1^m \frac{\alpha_k^0 + \alpha'_k}{2} x_k - y \right\| \leqq$

$$\leqq \frac{1}{2} \left\| \sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right\| = \lambda$$

donde:

$$\left\| \left(\sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right) + \left(\sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right) \right\| =$$

$$\left\| \sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right\| + \left\| \sum_1^m \alpha_k^1 x_k - y \right\| ;$$

mas sendo a norma do espaço forte, esta igualdade só é possível quando

$$\sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y = \alpha \left(\sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right) ;$$

ora se $\alpha \neq 1$, tira-se da última igualdade

$$(1 - \alpha) y = \sum_1^m (\alpha_k^0 - \alpha'_k) x_k$$

que dá y como combinação linear dos x_k, ou seja $y \in V$, contràriamente à hipótese; tem, pois, de ser $\alpha = 1$, e neste caso ficaria $\sum_1^m (\alpha_k^0 - \alpha'_k) x_k = 0$, equação que, em virtude de serem os x_k linearmente independentes, só tem a solução trivial $\alpha_k^0 - \alpha_k^1 = 0$ $(k = 1, \cdots, m)$. Portanto: é $x_0 = x'$, e o vector (7. 4) é único. O teorema fica assim completamente demonstrado (*).

(*) Confr. N. I. Ahcieser, *Vorlesungen über Approximations-theorie*, Berlin, 1953, pág. 10-12, e L. A. Ljusternik — W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, 1955, pág. 78-81.

(Continua no próximo número)